Sup PCSI2 — Exercices : dérivation (1)

$\boxed{\text{Q1}}$ Explicitez l'ensemble de définition, puis la dérivée de chacune des fonctions suivantes : $f\,:\,x \mapsto x^3\cos(1/x)$, $g\,:\,x \mapsto \sqrt{2x+1}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$, $h\,:\,x \mapsto (x^2-x-1)\exp(x^3/2)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $e^x \geqslant 2e^{x/2}-1$ pour tout réel x. Exercice trouvé dans le chapitre « Dérivation » du *Tout en un MPSI-PCSI* de Bréal. Sic...

$\boxed{\text{Q3}}$ Explicitez les trois premières dérivées de la fonction $x \mapsto \ln(1+2x^2)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Explicitez les deux premières dérivées de la fonction $x \mapsto \sin\big(2\sin(3x)\big)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Explicitez la dérivée de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{3x^2} \exp(t^2)\,dt$.

$\boxed{\text{Q6}}$ En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2x+2}$ est-elle dérivable ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Notons $f\,:\,x\in\mathbb{R} \mapsto \dfrac{|x|}{1+|1-x^2|}$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable ?

$\boxed{\text{Q8}}$ La fonction $x \mapsto cos\big(\sqrt{x}\big)$ est-elle dérivable à droite de 0 ?

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que $f\,:\,x\in\mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]-1,+1[$. Tracez la courbe représentative de f. Étudiez la dérivabilité de f. Explicitez la bijection réciproque de f.

$\boxed{\text{Q10}}$ Soit $f\,:\,\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en 0. Calculez $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(3x)+f(5x)-2f(2x)}{x}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Exhibez $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ périodique, mais qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Exhibez $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ périodique, mais qui n'est pas de classe $\mathcal{D}^2$.

$\boxed{\text{Q13}}$ f est définie au voisinage de a et dérivable en a. Calculez la limite de $\dfrac{f(a+h^2)-f(a-h^2)}{h}$ quand h tend vers 0.

$\boxed{\text{Q14}}$ f est définie au voisinage de a et dérivable en a. Calculez la limite de $\dfrac{f(a+3h)-3f(a-2h)-f(a+5h)}{h}$ quand h tend vers 0.

$\boxed{\text{Q15}}$ f et g sont définies au voisinage de a et dérivables en a. Calculez la limite de $\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$ quand x tend vers a.

$\boxed{\text{Q16}}$ Soit $f\,:\,x \mapsto \arcsin\Big(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big)$. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ? Montrez que f est dérivable sur D_f. Explicitez $f'(x)$. Déduisez-en une expression *très simple* de $f(x)$.

$\boxed{\text{Q17}}$ Définissons une fonction f comme suit : $f(x)=e^{-x}+x+1$ si $x \leqslant 0$ et $f(x)=2+x^2\ln(x)$ si $x>0$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{\text{Q18}}$ Notons $f\,:\,x \mapsto \big(x-\lfloor x\rfloor\big)^2+\lfloor x\rfloor$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Est-elle monotone ? Donnez l'allure de la courbe représentative, sur $[-2..3]$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Définissons une fonction f comme suit : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ si $x \leqslant 0$; $f(x)=x^2\ln(x)$ si $x>0$. Montres que f est continue en 0. Étudiez la dérivabilité de f à gauche, puis à droite, de 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$\boxed{\text{Q20}}$ Notons $f\,:\,x \mapsto \big(x-\lfloor x\rfloor\big)\big(x-\lfloor x\rfloor-1\big)$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Quelle propriété intéressante possède-t-elle ? Donnez l'allure de la courbe représentative, sur $[-2..3]$.

$\boxed{\text{Q21}}$ Déterminez des réels a, b et c tel que la fonction f définie par $f(x)=e^x$ si $x<0$ et $f(x)=ax^2+bx+c$ sinon soit de classe $\mathcal{C}^2$. Peut-elle être de classe $\mathcal{C}^3$?

---

8 : OUI : $f'_d(0)=-1/2$; **13** : $-f'(a)$; **14** : $4f'(a)$; **15** : $f'(a)g(a)-f(a)g'(a)$;