Sup PCSI2 — Exercices : convexité

Q1 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est convexe. La fonction $x \mapsto f(-x)$ est-elle convexe ? Et la fonction $x \mapsto -f(x)$?

Q2 Montrez que $f : x > 1 \mapsto -\ln\big(\ln(x)\big)$ est convexe. En déduire $\ln\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) \geqslant \sqrt{\ln(a) \times \ln(b)}$ pour $a > 1$ et $b > 1$.

Q3 Montrez que $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln\big(1 + e^x\big)$ est convexe. En déduire que, si $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de réels strictement positifs, alors :

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + t_k)}$$

Q4 Soient $a_1, \ldots, a_n \in [0, 1[$; notons $A = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$. Établissez : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_k}{a_k - 1} \leqslant \frac{nA}{A - n}$.

Q5 Soient $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de réels, et x majorant strictement tous les membres de cette famille. Notons $\mu = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$. Établissez : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{x - a_k} \geqslant \frac{n}{x - \mu}$.

Q6 Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$, $S = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$ et $S_k = S - a_k$. Établissez : $\dfrac{n}{n-1} \leqslant \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_k}{S_k}$.

Q7 En vous inspirant des exemples précédents, concevez votre exercice sur la convexité.

Q8 Soient f et g deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Montrez que $h : x \mapsto \max\big(f(x), g(x)\big)$ est également convexe. En est-il de même pour $k : x \mapsto \min\big(f(x), g(x)\big)$?

Q9 f et g sont deux fonctions convexes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $f + g$, fg et λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sont-elles convexes ?

Q10 Soit f convexe et strictement décroissante sur un intervalle I. Prouvez que f^{-1} est convexe.

Q11 Une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est convexe. Montrez qu'elle est bornée, et qu'elle possède un maximum.

Q12 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Établissez $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Q13 Soient $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de réels strictement positifs, et $(q_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de réels positifs et de somme égale à 1. Établissez : $\displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} {x_k}^{q_k} \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} q_k x_k$. Lien avec l'exercice précédent ?

Q14 Pour $x \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établissez $x^n - 1 \geqslant n\big(x^{(n+1)/2} - x^{(n-1)/2}\big)$.

Q15 Soit $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de réels strictement positifs ; notons $t_{n+1} = t_1$. Établissez $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{t_{k+1}}{t_k} \geqslant n$.

Q16 Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établissez : $\dfrac{a^n}{\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant 2n} a^k} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$. On peut envisager trois méthodes différentes

Q17 Prouvez que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe et majorée est constante. *Indication* : utilisez l'inégalité de convexité. Ce résultat reste-t-il valable pour une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$?

Q18 Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ convexe. On suppose qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) = \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$. Prouvez que f est affine.

Q19 Discutez le nombre de solutions de l'équation $2^x = kx$ en fonction de k. Indication : utilisez Q18.

Q20 La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ? Prouvez que, si f et g sont convexes, si f ou g est croissante, et si $g \circ f$ est définie, alors $g \circ f$ est convexe. Donnez un contre-exemple avec g décroissante.

Q21 f et g sont deux fonctions convexes sur un intervalle I. On suppose qu'il existe des réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que $af + bg$ soit affine. Prouvez que f et g sont affines.

Q22 Soit $f :]a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ convexe, croissante, non constante. Prouvez que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Q23 Soit $f :]a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ convexe. Prouvez que, quand $t \to +\infty$, $f(t)/t$ a une limite finie ou tend vers $+\infty$.

Q24 Soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille de fonctions convexes sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, vérifiant la condition suivante : pour tout $x \in I$, l'ensemble $\big\{f_j(x), j \in J\big\}$ est majoré. Nous pouvons alors définir $\varphi : x \in I \mapsto \sup\limits_{j \in J} f_j(x)$.

Prouvez que φ est convexe. φ est appelée *enveloppe convexe* de la famille $(f_j)_{j \in J}$.