Sup PCSI2 — Une preuve élégante dûe à CAUCHY

La moyenne géométrique entre plusieurs nombres A, B, C, D, ... est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.

La preuve donnée par CAUCHY

Soit n le nombre des lettres A, B, C, D, ... Il suffira de prouver, qu'on a généralement

$$\sqrt[n]{ABCD\cdots} < \frac{A+B+C+D+\cdots}{n}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ABCD\cdots < \Big(\frac{A+B+C+D+\cdots}{n}\Big)^n$$

Or, en premier lieu, on aura évidemment, pour $n=2$,

$$AB = \Big(\frac{A+B}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{A-B}{2}\Big)^2 < \Big(\frac{A+B}{2}\Big)^2$$

et l'on en conclura, en prenant successivement $n=4$, $n=8$, ..., enfin $n=2^m$

$$ABCD < \Big(\frac{A+B}{2}\Big)^2\Big(\frac{C+D}{2}\Big)^2 < \Big(\frac{A+B+C+D}{4}\Big)^4$$

$$ABCDEFGH < \Big(\frac{A+B+C+D}{4}\Big)^4\Big(\frac{E+F+G+H}{4}\Big)^4 < \Big(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{6}\Big)^8$$

....

$$ABCD\cdots < \Big(\frac{A+B+C+D+\cdots}{2^m}\Big)^{2^m}$$

En second lieu, si n n'est pas un terme de la progrssion géométrique

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

on désignera par 2^m un terme de cette progression supérieur à n, et l'on fera

$$K = \frac{A+B+C+D+\cdots}{n}$$

puis, en revenant à la formule (3), et supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux à K, on trouvera

$$ABCD\cdots K^{2^m-n} < \Big[\frac{A+B+C+D+\cdots+(2^m-n)K}{2^m}\Big]^{2^m}$$

ou, en d'autres termes,

$$ABCD\cdots K^{2^m-n} < K^{2^m}$$

On aura donc par la suite

$$ABCD\cdots < K^n = \Big(\frac{A+B+C+D+\cdots}{n}\Big)^n$$

ce qu'il fallait démontrer.

Commentaire

Manifestement, Cauchy n'avait pas à sa disposition l'opérateur $\sum$, qui lui aurait simplifié la vie.