

*La moyenne géométrique entre plusieurs nombres  $A, B, C, D, \dots$  est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.*

**La preuve donnée par CAUCHY**

Soit  $n$  le nombre des lettres  $A, B, C, D, \dots$ . Il suffira de prouver, qu'on a généralement

$$\sqrt[n]{ABCD\dots} < \frac{A + B + C + D + \dots}{n}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ABCD\dots < \left(\frac{A + B + C + D + \dots}{n}\right)^n$$

Or, en premier lieu, on aura évidemment, pour  $n = 2$ ,

$$AB = \left(\frac{A + B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A - B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A + B}{2}\right)^2$$

et l'on en conclura, en prenant successivement  $n = 4, n = 8, \dots$ , enfin  $n = 2^m$

$$ABCD < \left(\frac{A + B}{2}\right)^2 \left(\frac{C + D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A + B + C + D}{4}\right)^4$$

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A + B + C + D}{4}\right)^4 \left(\frac{E + F + G + H}{4}\right)^4 < \left(\frac{A + B + C + D + E + F + G + H}{6}\right)^8$$

.....

$$ABCD\dots < \left(\frac{A + B + C + D + \dots}{2^m}\right)^{2^m}$$

En second lieu, si  $n$  n'est pas un terme de la progression géométrique

$$2, 4, 8, 16, \dots$$

on désignera par  $2^m$  un terme de cette progression supérieur à  $n$ , et l'on fera

$$K = \frac{A + B + C + D + \dots}{n}$$

puis, en revenant à la formule (3), et supposant dans le premier membre de cette formule les  $2^m - n$  derniers facteurs égaux à  $K$ , on trouvera

$$ABCD\dots K^{2^m-n} < \left[\frac{A + B + C + D + \dots + (2^m - n)K}{2^m}\right]^{2^m}$$

ou, en d'autres termes,

$$ABCD\dots K^{2^m-n} < K^{2^m}$$

On aura donc par la suite

$$ABCD\dots < K^n = \left(\frac{A + B + C + D + \dots}{n}\right)^n$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Commentaire**

Manifestement, Cauchy n'avait pas à sa disposition l'opérateur  $\sum$ , qui lui aurait simplifié la vie.