$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Exercices : convexité (2)}}$

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient f et g deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Montrez que $h : x \mapsto \max\big(f(x), g(x)\big)$ est également convexe. En est-il de même pour $k : x \mapsto \min\big(f(x), g(x)\big)$?

$\boxed{\text{Q2}}$ f et g sont deux fonctions convexes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $f+g$, fg et λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sont-elles convexes ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit f convexe et strictement décroissante sur un intervalle I. Prouvez que f^{-1} est convexe.

$\boxed{\text{Q4}}$ Une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est convexe. Montrez qu'elle est bornée, et qu'elle possède un maximum.

$\boxed{\text{Q5}}$ Prouvez que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe et majorée est constante. *Indication* : utilisez l'inégalité de convexité. Ce résultat reste-t-il valable pour une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$?

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ convexe. On suppose qu'il existe $\lambda \in \,]0,1[$ tel que $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$. Prouvez que f est affine.

$\boxed{\text{Q7}}$ Discutez le nombre de solutions de l'équation $2^x = kx$ en fonction de k. Indication : utilisez Q6.

$\boxed{\text{Q8}}$ La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ? Prouvez que, si f et g sont convexes, si f ou g est croissante, et si $g \circ f$ est définie, alors $g \circ f$ est convexe. Donnez un contre-exemple avec g décroissante.

$\boxed{\text{Q9}}$ f et g sont deux fonctions convexes sur un intervalle I. On suppose qu'il existe des réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que $af + bg$ soit affine. Prouvez que f et g sont affines.

$\boxed{\text{Q10}}$ Soit $f : \,]a, +\infty[\, \mapsto \mathbb{R}$ convexe, croissante, non constante. Prouvez que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Soit $f : \,]a, +\infty[\, \mapsto \mathbb{R}$ convexe. Prouvez que, quand $t \to +\infty$, $f(t)/t$ a une limite finie ou tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Soit $(f_j)_{j\in J}$ une famille de fonctions convexes sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, vérifiant la condition suivante : pour tout $x \in I$, l'ensemble $\big\{f_j(x), j \in J\big\}$ est majoré. Nous pouvons alors définir $\varphi : x \in I \mapsto \sup\limits_{j\in J} f_j(x)$.

Prouvez que φ est convexe. φ est appelée *enveloppe convexe* de la famille $(f_j)_{j\in J}$.