

- Q1 Soient f et g deux fonctions convexes de \mathbb{R} dans lui-même. Montrez que $h : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est également convexe. En est-il de même pour $k : x \mapsto \min(f(x), g(x))$?
- Q2 f et g sont deux fonctions convexes sur un intervalle I de \mathbb{R} . $f+g$, fg et λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sont-elles convexes ?
- Q3 Soit f convexe et strictement décroissante sur un intervalle I . Prouvez que f^{-1} est convexe.
- Q4 Une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est convexe. Montrez qu'elle est bornée, et qu'elle possède un maximum.
- Q5 Prouvez que toute fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} convexe et majorée est constante. *Indication* : utilisez l'inégalité de convexité. Ce résultat reste-t-il valable pour une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} ?
- Q6 Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ convexe. On suppose qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$. Prouvez que f est affine.
- Q7 Discutez le nombre de solutions de l'équation $2^x = kx$ en fonction de k . *Indication* : utilisez Q6.
- Q8 La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ? Prouvez que, si f et g sont convexes, si f ou g est croissante, et si $g \circ f$ est définie, alors $g \circ f$ est convexe. Donnez un contre-exemple avec g décroissante.
- Q9 f et g sont deux fonctions convexes sur un intervalle I . On suppose qu'il existe des réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que $af + bg$ soit affine. Prouvez que f et g sont affines.
- Q10 Soit $f :]a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ convexe, croissante, non constante. Prouvez que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
- Q11 Soit $f :]a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ convexe. Prouvez que, quand $t \rightarrow +\infty$, $f(t)/t$ a une limite finie ou tend vers $+\infty$.
- Q12 Soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille de fonctions convexes sur un même intervalle I de \mathbb{R} , vérifiant la condition suivante : pour tout $x \in I$, l'ensemble $\{f_j(x), j \in J\}$ est majoré. Nous pouvons alors définir $\varphi : x \in I \mapsto \sup_{j \in J} f_j(x)$. Prouvez que φ est convexe. φ est appelée *enveloppe convexe* de la famille $(f_j)_{j \in J}$.