Sup PCSI2 — Exercices : convexité (1)

Q1 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est convexe. La fonction $x \mapsto f(-x)$ est-elle convexe ? Et la fonction $x \mapsto -f(x)$?

Q2 Montrez que $f : x > 1 \mapsto -\ln\big(\ln(x)\big)$ est convexe. En déduire $\ln\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) \geqslant \sqrt{\ln(a) \times \ln(b)}$ pour $a > 1$ et $b > 1$.

Q3 Montrez que $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln\big(1 + e^x\big)$ est convexe. En déduire que, si $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de réels strictement positifs, alors :

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{1\leqslant k\leqslant n} t_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{1\leqslant k\leqslant n} (1+t_k)}$$

Q4 Soient $a_1, \ldots, a_n \in [0,1[$; notons $A = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$. Établissez : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{a_k - 1} \leqslant \frac{nA}{A-n}$.

Q5 Soient $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels, et x majorant strictement tous les membres de cette famille. Notons $\mu = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$. Établissez : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{x - a_k} \geqslant \frac{n}{x-\mu}$.

Q6 Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$, $S = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$ et $S_k = S - a_k$. Établissez : $\dfrac{n}{n-1} \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{S_k}$.

Q7 En vous inspirant des exemples précédents, concevez votre exercice sur la convexité.

Q8 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Établissez $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Q9 Soient $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels strictement positifs, et $(q_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels positifs et de somme égale à 1. Établissez : $\displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant n} {x_k}^{q_k} \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} q_k x_k$. Lien avec l'exercice précédent ?

Q10 Soit $a \in \mathbb{R}$. Prouvez l'inégalité $a^{ab} \leqslant \mathrm{ch}(a) + b\,\mathrm{sh}(a)$.

Q11 Soient a, b, c trois réels strictement positifs. Prouvez l'inégalité $ab^2c^3 \leqslant \Big(\dfrac{a+2b+3c}{6}\Big)^6$. Quelle(s) généralisation(s) de cette inégalité pouvez-vous proposer ?

Q12 Pour $x \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établissez $x^n - 1 \geqslant n\big(x^{(n+1)/2} - x^{(n-1)/2}\big)$.

Q13 Soit $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de réels strictement positifs ; notons $t_{n+1} = t_1$. Établissez $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{t_{k+1}}{t_k} \geqslant n$.

Q14 Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établissez : $\dfrac{a^n}{\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant 2n} a^k} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$. On peut envisager trois méthodes différentes