

- Q1** $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est convexe. La fonction $x \mapsto f(-x)$ est-elle convexe ? Et la fonction $x \mapsto -f(x)$?
- Q2** Montrez que $f : x > 1 \mapsto -\ln(\ln(x))$ est convexe. En déduire $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a) \times \ln(b)}$ pour $a > 1$ et $b > 1$.
- Q3** Montrez que $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe. En déduire que, si $(t_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de réels strictement positifs, alors :

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{1 \leq k \leq n} t_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{1 \leq k \leq n} (1 + t_k)}$$

- Q4** Soient $a_1, \dots, a_n \in [0, 1[$; notons $A = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$. Établissez : $\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{a_k - 1} \leq \frac{nA}{A - n}$.
- Q5** Soient $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels, et x majorant strictement tous les membres de cette famille. Notons $\mu = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$. Établissez : $\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{x - a_k} \geq \frac{n}{x - \mu}$.
- Q6** Soient $a_1, \dots, a_n > 0$, $S = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$ et $S_k = S - a_k$. Établissez : $\frac{n}{n-1} \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{S_k}$.
- Q7** En vous inspirant des exemples précédents, concevez votre exercice sur la convexité.
- Q8** Soient x_1, x_2, \dots, x_n des réels strictement positifs. Établissez $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.
- Q9** Soient $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels strictement positifs, et $(q_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels positifs et de somme égale à 1. Établissez : $\prod_{1 \leq k \leq n} x_k^{q_k} \leq \sum_{1 \leq k \leq n} q_k x_k$. Lien avec l'exercice précédent ?

Q10 Soit $a \in \mathbb{R}$. Prouvez l'inégalité $a^{ab} \leq \text{ch}(a) + b \text{sh}(a)$.

Q11 Soient a, b, c trois réels strictement positifs. Prouvez l'inégalité $ab^2c^3 \leq \left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^6$. Quelle(s) généralisation(s) de cette inégalité pouvez-vous proposer ?

Q12 Pour $x \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établissez $x^n - 1 \geq n(x^{(n+1)/2} - x^{(n-1)/2})$.

Q13 Soit $(t_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de réels strictement positifs ; notons $t_{n+1} = t_1$. Établissez $\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{t_{k+1}}{t_k} \geq n$.

Q14 Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établissez : $\frac{a^n}{\sum_{0 \leq k \leq 2n} a^k} \leq \frac{1}{2n+1}$. On peut envisager trois méthodes différentes