Un mini-problème

▶ Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Notons $\mathcal{I} = [a, b]$. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathcal{I})$.

Q1 Montrez que f possède au moins un point fixe.

Q2 Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels vérifiant $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Explicitez une fonction $g \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathcal{I})$ dont $x_1, \ldots, x_n$ sont les points fixes.

Un mini-problème

▶ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant $f(2x) = f(x)$ pour tout réel x. Nous nous proposons de montrer que f est constante. Pour ce faire, fixons $x \neq 0$ et étudions la suite de terme général $t_n = 2^{-n}x$.

Q1 Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q2 Quelle est la limite de la suite $\big(f(t_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q3 Et maintenant, concluez !

Q4 Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant $g(x^2) = g(x)$ pour tout réel x. En vous inspirant de la démarche suivie précédemment, montrez que g est constante.

Un mini-problème

▶ Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}\big([a, +\infty[, \mathbb{R}\big)$. Nous supposons que f possède en $+\infty$ une limite $\ell > f(a)$.

Q1 Montrez que f est bornée.

▶ Nous noterons m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de f.

Q2 Donnez un exemple où f atteint m mais pas M.

Q3 Donnez un exemple où f atteint m et M.

Q4 Montrez que f atteint la valeur m.

Q5 Montrez que f prend toute valeur de l'intervalle $\big[f(a), \ell\big[$.

Un mini-problème

▶ Soit $f \in \mathcal{C}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$.

Q1 $\star$ Justifiez l'existence de la fonction g qui, à $x \in [a, b]$, associe la borne supérieure de f sur $[a, x]$.

Q2 Montrez que cette fonction est croissante et continue.

Q3 Montrez que g est strictement croissante ssi f l'est.