$\mathcal{I}$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, d'amplitude non nulle.

Q1 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(2x) - \arctan(x)$. Décrivez $f(\mathbb{R})$.

Q2 Notons $f : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Quel est l'ensemble de définition de f ? La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Q3 Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],[a,b]\big)$. Montrez que f possède un point fixe. Est-il unique ?

Q4 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ est décroissante. Montrez que f possède un et un seul point fixe.

Q5 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Que pouvez-vous dire de f ?

Q6 Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],[0,1]\big)$, vérifiant $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} f^2$. Que pouvez-vous dire de f ?

Q7 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ périodique. Montrez que f est bornée.

Q8 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$, ne prenant pas la valeur 0. Que pouvez-vous dire de f ?

Q9 Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, et $p, q \in \mathbb{R}_+$. Prouvez l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Q10 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $x_1, \ldots, x_n$ des points de I. Montrez qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} f(x_k)$.

Q11 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction polynôme de degré pair. Montrez que f n'est ni injective ni surjective.

Q12 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction polynôme de degré impair. Montrez que f est surjective, mais pas nécessairement injective.

Q13 Montrez qu'il n'existe aucune fonction polynôme P vérifiant $P(x) = \sqrt{x^2+1}$ pour tout réel x.

Q14 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifie $\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant |x - y|$ quels que soient x et y. Montrez que f est injective, non bornée, et surjective.

Q15 Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, vérifiant $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrez que pour tout $\lambda \geqslant 0$, il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = \lambda g(x)$.

Q16 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Que pouvez-vous dire de f ?

Q17 Notons f la fonction définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = -x$ sinon. En quel(s) point(s) de $\mathbb{R}$ f est-elle continue ?

Q18 $\star$ $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ est k-lipschitzienne sur $]a,b[$. Montrez qu'elle est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Q19 $\star$ $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ est périodique et possède une limite en $+\infty$. Que pouvez-vous dire de f ?

Q20 $\star$ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$. Montrez que f possède un minimum.

Q21 $\star\star$ Soient $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $y \in f\big([a,b]\big)$. Notons E l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels que $f(x) = y$. Montrez que E possède un plus petit élément.

Un mini-problème

► Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Q1 Quel est l'ensemble de définition de f ?

Q2 Donnez une relation *simple* liant $f(x)$ et $f(x+1)$.

Q3 Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Q4 f est-elle monotone ? Si oui, quel est son sens de variation ?

Q5 Soit $a \in]0,1]$. f est-elle lipschitizienne sur $[a,1]$? f est-elle lipschitizienne sur $[0,1]$?

---

1 : $[-a,a]$ où $a = \arctan(\sqrt{2}) - \arctan(\sqrt{2}/2)$; **17** : en 0 ;