

\mathcal{I} désigne un intervalle de \mathbb{R} , d'amplitude non nulle.

- Q1** Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(2x) - \arctan(x)$. Décrivez $f(\mathbb{R})$.
- Q2** Notons $f : x \mapsto \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Quel est l'ensemble de définition de f ? La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0?
- Q3** Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], [a, b])$. Montrez que f possède un point fixe. Est-il unique?
- Q4** $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ est décroissante. Montrez que f possède un et un seul point fixe.
- Q5** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Que pouvez-vous dire de f ?
- Q6** Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], [0, 1])$, vérifiant $\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} f^2$. Que pouvez-vous dire de f ?
- Q7** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ périodique. Montrez que f est bornée.
- Q8** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$, ne prenant pas la valeur 0. Que pouvez-vous dire de f ?
- Q9** Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, et $p, q \in \mathbb{R}_+$. Prouvez l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.
- Q10** Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et x_1, \dots, x_n des points de I . Montrez qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} f(x_k)$.
- Q11** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction polynôme de degré pair. Montrez que f n'est ni injective ni surjective.
- Q12** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction polynôme de degré impair. Montrez que f est surjective, mais pas nécessairement injective.
- Q13** Montrez qu'il n'existe aucune fonction polynôme P vérifiant $P(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ pour tout réel x .
- Q14** $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifie $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ quels que soient x et y . Montrez que f est injective, non bornée, et surjective.
- Q15** Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, vérifiant $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrez que pour tout $\lambda \geq 0$, il existe un $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = \lambda g(x)$.
- Q16** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Que pouvez-vous dire de f ?
- Q17** Notons f la fonction définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = -x$ sinon. En quel(s) point(s) de \mathbb{R} f est-elle continue?
- Q18** \star $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est k -lipschitzienne sur $]a, b[$. Montrez qu'elle est k -lipschitzienne sur $[a, b]$.
- Q19** \star $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ est périodique et possède une limite en $+\infty$. Que pouvez-vous dire de f ?
- Q20** \star Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$. Montrez que f possède un minimum.
- Q21** $\star\star$ Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $y \in f([a, b])$. Notons E l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que $f(x) = y$. Montrez que E possède un plus petit élément.

Un mini-problème

► Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

- Q1** Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Q2** Donnez une relation *simple* liant $f(x)$ et $f(x + 1)$.
- Q3** Montrez que f est continue sur \mathbb{R} .
- Q4** f est-elle monotone? Si oui, quel est son sens de variation?
- Q5** Soit $a \in]0, 1[$. f est-elle lipschitzienne sur $[a, 1]$? f est-elle lipschitzienne sur $[0, 1]$?