

Énoncé 1

- Que peut-on dire de trois éléments P , Q et R de $\mathbb{R}[X]$, s'ils vérifient $P^2 - XQ^2 + R^2 = 0$?

Corrigé 1

- Ces trois polynômes sont nuls ! En effet, écrivons l'égalité $XQ^2 = P^2 + R^2$; le membre de gauche est, soit nul, soit de degré impair, tandis que celui de droite est, soit nul, soit pair. Donc tous deux sont nuls. Mais alors $Q = 0$; et, comme les polynômes sont à coefficients réels, $P = R = 0$ (considérer les fonctions polynômes associées à P^2 et R^2 : elles sont toutes deux positives, leur somme est nulle, donc chacune est nulle).

Énoncé 2

- On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes en posant $P_0 = X$ et $P_{n+1} = (P_n - 2)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter le reste dans la division euclidienne de P_n par X^3 .

Corrigé 2

- Notons $P_n = a_n + b_n X + c_n X^2 + X^3 Q_n$, il s'agit de donner des formules pour a_n , b_n et c_n . On a déjà $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$. Par ailleurs, $P_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} X + c_{n+1} X^2 + X^3 Q_{n+1}$ donne, par identification avec $P_{n+1} = (a_n - 2 + b_n X + c_n X^2 + X^3 Q_n)^2$: $a_{n+1} = (a_n - 2)^2$, $b_{n+1} = 2(a_n - 2)b_n$ et $c_{n+1} = b_n^2 + 2(a_n - 2)c_n$. On a donc $a_1 = 4$, puis, avec une récurrence immédiate, $a_n = 4$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit, toujours pour $n \geq 1$, $b_{n+1} = 4b_n$, d'où $b_n = -4^n$ puisque $b_1 = -4$. Alors (toujours avec $n \geq 1$), on a $c_{n+1} = 4^{2n} + 4c_n$ soit $\frac{c_{n+1}}{4^{n+1}} = 4^{n-1} + \frac{c_n}{4^n}$; donc, avec $c_1 = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{c_n}{4^n} &= \frac{c_1}{4} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left(\frac{c_{k+1}}{4^{k+1}} - \frac{c_k}{4^k} \right) = \frac{1}{4} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} 4^{k-1} = \frac{1}{4} + \sum_{0 \leq k \leq n-2} 4^k \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1 - 4^{n-1}}{1 - 4} = \frac{1}{4} + \frac{4^{n-1} - 1}{3} = \frac{4^n - 1}{12} \end{aligned}$$

Donc $c_n = \frac{4^{2n-1} - 4^{n-1}}{3}$, et on constate que cette formule vaut en fait pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé 3

- Déterminer les éléments P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

Corrigé 3

- Il est clair que $P = 0$ est une solution. Soit $P \neq 0$ une autre solution : $P(0) = 0$; on en déduit successivement $P(-1) = 0$, $P(-2) = 0$ et $P(-3) = 0$. Donc P est divisible par $X(X + 1)(X + 2)(X + 3)$. Réciproquement si P est divisible par $X(X + 1)(X + 2)(X + 3)$, alors, notant $P = X(X + 1)(X + 2)(X + 3)Q$, on aura

$$\begin{aligned} XP(X + 1) &= X(X + 1)(X + 2)(X + 3)(X + 4)Q(X + 1) \\ (X + 4)P(X) &= (X + 4)X(X + 1)(X + 2)(X + 3)Q(X) \end{aligned}$$

d'où $Q(X) = Q(X + 1)$: Q est nécessairement un polynôme constant (observer $Q - Q(0)$: il s'annule en tout point de \mathbb{Z}). Conclusion : les solutions sont les polynômes de la forme $\lambda X(X + 1)(X + 2)(X + 3)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Énoncé 4

- $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe R et S dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = R^2 + S^2$.

Corrigé 4

- Notons d'abord que, dans tout anneau commutatif, et en particulier dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = A^2 C^2 + A^2 D^2 + B^2 C^2 + B^2 D^2 = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$$

id est : le produit de deux sommes de deux carrés parfaits est encore une somme de deux carrés parfaits. De plus, tout carré parfait est une somme de deux carrés parfaits (lui ajouter 0^2). Écrivons la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles :

$$P = \alpha \prod_{1 \leq k \leq m} (X - x_k)^{2d_k} \prod_{1 \leq k \leq n} (X^2 - 2b_k X + c_k)^{e_k}$$

avec $b_k^2 - c_k < 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et $\alpha > 0$. Comme α et $\prod_{1 \leq k \leq m} (X - x_k)^{2d_k}$ sont des carrés parfaits, il suffit d'établir que chaque $X^2 - 2b_k X + c_k$ est une somme de deux carrés parfaits, ce qui est clair :

$$X^2 - 2b_k X + c_k = (X - b_k)^2 + c_k - b_k^2 = (X - b_k)^2 + \left(\sqrt{c_k - b_k^2}\right)^2$$

Énoncé 5

•• Factoriser $P = (X + i)^n - (X - i)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$, et en déduire une expression de

$$\prod_{1 \leq k \leq q} \left(4 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2q+1}\right)$$

sous forme d'une somme *assez simple*.

Corrigé 5

•• P est de degré $n - 1$; on a, notant $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$:

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 &\iff (\alpha + i)^n - (\alpha - i)^n = 0 \iff \left(\frac{\alpha + i}{\alpha - i}\right)^n = 1 \text{ et } \alpha \neq i \\ &\iff \frac{\alpha + i}{\alpha - i} = e^{i\theta_k} \text{ et } \alpha \neq i \iff (e^{i\theta_k} - 1)\alpha = i(e^{i\theta_k} + 1) \text{ et } \alpha \neq i \end{aligned}$$

soit $\alpha = i \frac{e^{i\theta_k} + 1}{e^{i\theta_k} - 1}$ avec $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$; donc $\alpha = i \cotan \frac{k\pi}{n}$. On a ainsi exhibé $n - 1$ racines de P , si bien que

$$P = \frac{1}{2ni} \prod_{1 \leq k \leq n-1} \left(X - i \cotan \frac{k\pi}{n}\right)$$

puisque le coefficient dominant de P est $2ni$.

• On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq k \leq q} \left(4 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2q+1}\right) &= \prod_{1 \leq k \leq q} \left(2 + i \cotan \frac{k\pi}{2q+1}\right) \times \prod_{1 \leq k \leq q} \left(2 - i \cotan \frac{k\pi}{2q+1}\right) \\ &= \prod_{1 \leq k \leq q} \left(2 + i \cotan \frac{k\pi}{2q+1}\right) \times \prod_{1 \leq k \leq q} \left[2 + i \cotan\left(\pi - \frac{k\pi}{2q+1}\right)\right] \\ &= \prod_{1 \leq k \leq q} \left(2 + i \cotan \frac{k\pi}{2q+1}\right) \times \prod_{1 \leq k \leq q} \left(2 + i \cotan \frac{(2q+1-k)\pi}{2q+1}\right) \\ &= \prod_{1 \leq k \leq 2q} \left(2 + i \cotan \frac{k\pi}{2q+1}\right) = 2niP(2) = 2ni[(2+i)^n - (2-i)^n] \\ &= 4ni \sum_{0 \leq k \leq q} \binom{2q+1}{2k+1} 2^{2k} i^{2q+1-2k} = -4n \sum_{0 \leq k \leq q} \binom{2q+1}{2k+1} 2^{2k} (-1)^{q-k} \end{aligned}$$

Énoncé 6

•• Un polynôme P a pour restes respectifs 3, 7 et 13 dans les divisions euclidiennes par $X + 1$, $X + 2$ et $X + 3$. Quel est son reste dans la division euclidienne par $(X + 1)(X + 2)(X + 3)$?

Corrigé 6

•• Ce reste est de degré 2 au plus : en l'exprimant dans la base $(1, X + 1, (X + 1)(X + 2))$ de $\mathbb{K}_2[X]$, on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que

$$P = (1, X + 1, (X + 1)(X + 2))Q + a + b(X + 1) + c(X + 1)(X + 2)$$

Mais $P(-1) = 3$, $P(-2) = 7$ et $P(-3) = 13$ d'après les hypothèses ; d'où $a = 3$, $a - b = 7$ et $a - 2b + 2c = 13$; donc $b = -4$ et $c = 1$, finalement le reste cherché est $3 - 4(X + 1) + (X + 1)(X + 2) = X^2 - X + 1$.

Énoncé 7

•• $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples. Montrer qu'il en est de même pour P' . Et si P est scindé, sans plus de précisions ?

Corrigé 7

•• Notons n le degré de P , et x_1, x_2, \dots, x_n les racines de P , classées par ordre croissant. Le théorème de Rolle affirme que P' s'annule (au moins) une fois dans chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$: donc P' possède au moins $n-1$ racines réelles distinctes. Comme il est exactement de degré $n-1$, on a le résultat demandé.

• Si P est scindé, avec éventuellement des racines multiples, il en est de même pour P' . En effet, notons $p \leq n$ le nombre de racines distinctes de P , et d_1, d_2, \dots, d_p les ordres de multiplicité respectifs des racines x_1, x_2, \dots, x_p de P . On a donc $\sum_{1 \leq k \leq p} \alpha_k = n$. Le théorème de Rolle fournit $p-1$ racines de P' ; par ailleurs, toute racine d'ordre $\alpha > 1$ de P est racine d'ordre $\alpha-1$ de P' , ce qui fournit encore $\sum_{1 \leq k \leq p} (\alpha_k - 1) = \sum_{1 \leq k \leq p} \alpha_k - p = n - p$ racines de P' ; au total, on obtient en tout $n-1$ racines de P' , comptées avec leurs ordres de multiplicité respectifs.

Énoncé 8

•• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n . Notant $P = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$ et $m(P) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$, montrer que toute racine ξ de P vérifie $|\xi| \leq 1 + \frac{m(P)}{|a_n|}$.

Corrigé 8

•• L'inégalité est claire si $|\xi| \leq 1$. Sinon, quitte à diviser tous les coefficients par a_n (qui n'est pas nul), on se ramène à établir $|\xi| \leq 1 + m(P)$ lorsque P est unitaire. Or :

$$P(\xi) = 0 \Rightarrow \xi^n + \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_k \xi^k = 0$$

$$\Rightarrow |\xi|^n = |\xi^n| = \left| - \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_k \xi^k \right| \leq \sum_{0 \leq k \leq n-1} |a_k| \cdot |\xi|^k \leq m(P) \sum_{0 \leq k \leq n-1} |\xi|^k = m(P) \frac{|\xi|^n - 1}{|\xi| - 1}$$

À plus forte raison, $|\xi|^n \leq m(P) \frac{|\xi|^n}{|\xi| - 1}$, soit $1 \leq \frac{m(P)}{|\xi| - 1}$, que l'on écrit $|\xi| - 1 \leq m(P)$, ou enfin $|\xi| \leq 1 + m(P)$. Cette majoration a été établie par CAUCHY en 1829.

Énoncé 9

•• \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Fixons un naturel n non nul, une famille $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de \mathbb{K} deux à deux distincts, et deux familles $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(c_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de \mathbb{K} . Prouver qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ vérifiant $P(a_k) = b_k$ et $P'(a_k) = c_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Corrigé 9

•• Considérons la fonction Φ qui, à $P \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$, associe le $2n$ -uplet d'éléments de \mathbb{K} :

$$(P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n), P'(a_1), P'(a_2), \dots, P'(a_n))$$

Elle est clairement linéaire ; elle est injective, car, si $P \in \ker \Phi$, alors P s'annule, ainsi que son dérivé, en chacun des a_k ; ce qui revient à dire que P possède n racines doubles distinctes. Mais P est de degré strictement inférieur à $2n$. Donc $P = 0$. Du coup, Φ , en tant qu'application linéaire injective, entre deux \mathbb{K} -e.v. de même dimension finie $2n$, est surjective, donc bijective, ce qui assure l'existence et l'unicité du polynôme P demandé (interpolation d'HERMITE).

Énoncé 10

•• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Corrigé 10

•• Le résultat est clair si $P = 0$: il n'y a aucune solution. Sinon, notons $n = \deg P$, et $g : x \mapsto P(x) - e^x$. g ne peut s'annuler plus de $n+1$ fois sur \mathbb{R} : sinon, en appliquant répétitivement le théorème de Rolle, $g' : x \mapsto P'(x) - e^x$ s'annulerait plus de n fois... $g^{(k)} : x \mapsto P^{(k)}(x) - e^x$ s'annulerait plus de $n+1-k$ fois, et enfin $g^{(n+1)} : x \mapsto P^{(n+1)}(x) - e^x = e^x$ s'annulerait au moins une fois, ce qui serait absurde. On a donc un résultat plus précis : si P est de degré n , l'équation considérée possède au plus $n+1$ racines réelles.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, et $P = (X - 1)^n - e^{2i\alpha}(X + 1)^n$. Factoriser P , en déduire la valeur de $\prod_{0 \leq k \leq n-1} \cotan\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$ lorsque $nx \notin \pi\mathbb{Z}$.

- $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $e^{2i\alpha} \neq 1$; ainsi, P est de degré n exactement. Comme $P(-1) \neq 0$, on a :

$$P(x) = 0 \iff \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n = e^{2i\alpha} \iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \frac{x-1}{x+1} = \xi_k^2$$

où $\xi_k = \exp\left(\frac{i(\alpha + k\pi)}{n}\right)$. Mais, notant $\theta_k = \frac{\alpha + k\pi}{n}$:

$$\frac{x-1}{x+1} = \xi_k^2 \iff x = \frac{1 + \xi_k^2}{1 - \xi_k^2} = \frac{\overline{\xi_k} + \xi_k}{\xi_k - \xi_k} = \frac{2 \cos \theta_k}{-2i \sin \theta_k} = i \cotan \theta_k$$

Les θ_k sont deux à deux distincts, et tous dans un même intervalle d'amplitude $\theta_{n-1} - \theta_0 = \frac{(n-1)\pi}{n} < \pi$, donc les $\cotan \theta_k$ sont deux à deux distincts. On a ainsi exhibé n racines distinctes de P , lequel est de degré n ; comme son coefficient dominant est $1 - e^{2i\alpha}$, on peut écrire :

$$P(X) = (1 - e^{2i\alpha}) \prod_{0 \leq k \leq n-1} (X - i \cotan \theta_k)$$

- Notons $\alpha = nx$, si bien que $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$. Alors, avec les résultats précédents :

$$\prod_{0 \leq k \leq n-1} \cotan\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{i^n} \prod_{0 \leq k \leq n-1} i \cotan \theta_k = \frac{1}{i^n} \frac{(-1)^n P(0)}{1 - e^{2i\alpha}} = i^n \frac{(-1)^n - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}}$$

Si $n = 2p$, il vient

$$\prod_{0 \leq k \leq n-1} \cotan\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) = i^n \frac{(-1)^n - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = (-1)^p \frac{1 - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = (-1)^p$$

Sinon, avec $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq k \leq n-1} \cotan\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) &= i^n \frac{(-1)^n - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = i^{2p+1} \frac{-1 - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} \\ &= i(-1)^{p+1} \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}} = i(-1)^{p+1} \frac{2 \cos \alpha}{-2i \sin \alpha} = (-1)^p \cotan \alpha = (-1)^p \cotan nx \end{aligned}$$

- Déterminer $P \in \mathbb{C}_3[X]$ vérifiant $P(j) = j^2$, $P(j^2) = j$, $P'(j) = j$ et $P'(j^2) = j^2$.

- Notons $Q = P' - X$; $Q \in \mathbb{C}_2[X]$ et $Q(j) = Q(j^2) = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$Q = \lambda(X - j)(X - j^2) = \lambda(X^2 + X + 1)$$

Par suite, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$P = \frac{\lambda}{3}X^3 + \frac{\lambda+1}{2}X^2 + \lambda X + \mu$$

λ et μ doivent vérifier :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda+1}{2}j^2 + \lambda j + \mu = j^2 \\ \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda+1}{2}j + \lambda j^2 + \mu = j \end{cases} \iff \begin{cases} 2\frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda+1}{2} - \lambda + 2\mu = -1 \\ \frac{\lambda+1}{2} - \lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\mu = -\frac{1}{2} + \frac{5\lambda}{6} \\ -\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\lambda = -1$ et $\mu = -\frac{2}{3}$. Finalement, $P = -\frac{X^3}{3} - X - \frac{2}{3}$.

- Trois éléments P , Q et R de $\mathbb{R}[X]$ vérifient $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer qu'ils sont tous trois nuls.

•• L'égalité proposée s'écrit $P^2 = X(Q^2 + R^2)$. Supposons P et Q non tous deux nuls ; alors le polynôme $Q^2 + R^2 = (Q + iR)(Q - iR)$ est de degré pair ; en effet, Q et R étant à coefficients réels, $Q + iR$ et $Q - iR$ ont même degré. Mais P^2 , de degré pair, ne peut être égal à $X(Q^2 + R^2)$, de degré impair. Du coup, Q et R doivent être tous deux nuls, et par suite P est lui aussi nul.

•• Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, unitaire et de degré $2n$. Montrer qu'il existe des éléments B et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A = B^2 + R$ et $\deg R < n$.

•• Si (B, R) est une solution, alors B doit être de degré n . Notons $A = \sum_{0 \leq k \leq 2n} a_k X^k$, avec $a_{2n} = 1$; et $B = \sum_{0 \leq k \leq n} b_k X^k$. Identifions les termes de degré au moins égal à n , dans les expressions respectives de A et de $B^2 + R$:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n^2 = a_{2n} = 1 \\ 2b_n b_{n-1} = a_{2n-1} \\ \vdots \\ \sum_{0 \leq k \leq p} b_{n-k} b_{n-p+k} = a_{2n-p} \quad \text{pour } p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\ \vdots \\ \sum_{0 \leq k \leq n} b_{n-k} b_k = a_n \end{array} \right.$$

Notant alors $\varepsilon = \pm 1$, il vient, en résolvant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = \varepsilon \\ b_{n-1} = \frac{a_{2n-1}}{2\varepsilon} \\ \vdots \\ b_{n-p} = \frac{1}{2\varepsilon} \left(a_{2n-p} - \sum_{1 \leq k \leq p-1} b_{n-k} b_{n-p+k} \right) \quad \text{pour } p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\ \vdots \\ b_0 = \frac{1}{2\varepsilon} \left(a_n - \sum_{1 \leq k \leq n-1} b_{n-k} b_k \right) \end{array} \right.$$

ce qui donne deux solutions, l'une B unitaire, l'autre $-B$; avec, à chaque fois, $R = A - B^2$.

•• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n . Notant $P = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$, montrer que toute racine ξ de P vérifie

$$|\xi| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[n-k]{\left| n \frac{a_k}{a_n} \right|}$$

•• Quitte à diviser tous les coefficients de P par $a_n \neq 0$, on peut supposer $a_n = 1$. Pour abrégé, notons $\rho = \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[n-k]{|na_k|}$: on a $|na_k| \leq \rho^{n-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Soit ξ une racine de P . Si $\xi = 0$, le résultat est clair. Sinon, $\xi^n = - \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_k \xi^k$, donc $|\xi|^n \leq \sum_{0 \leq k \leq n-1} |a_k| \cdot |\xi|^k$, dont on déduit

$$|\xi|^n \leq \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} |\xi|^k \rho^{n-k} = \frac{|\xi|^n}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{\rho}{|\xi|} \right)^{n-k}$$

d'où $1 \leq \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{\rho}{|\xi|} \right)^{n-k}$. Alors $|\xi| > \rho$ mènerait à une contradiction, car le membre de droite de cette inégalité serait strictement inférieur à 1. Donc $|\xi| \leq \rho$. Cette majoration a été établie par CAUCHY en 1829.

- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n . Notant $P = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$, montrer que toute racine ξ de P vérifie

$$|\xi| \leq 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[n-k]{|a_k|}$$

- Quitte à diviser tous les coefficients de P par $a_n \neq 0$, on peut supposer $a_n = 1$. Pour abrégé, notons $\rho = \max_{0 \leq k \leq n-1} \sqrt[n-k]{|a_k|}$: ainsi $|a_k| \leq \rho^{n-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Soit ξ une racine de P . Si $\xi = 0$, le résultat est clair. Sinon, $\xi^n = - \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_k \xi^k$, donc

$$|\xi|^n \leq \sum_{0 \leq k \leq n-1} |a_k| \cdot |\xi|^k \leq \sum_{0 \leq k \leq n-1} \rho^{n-k} |\xi|^k = |\xi|^n \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{\rho}{|\xi|} \right)^{n-k} = |\xi|^n \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\rho}{|\xi|} \right)^k$$

d'où l'on tire $1 \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\rho}{|\xi|} \right)^k$. $|\xi| > 2\rho$ mènerait alors à une contradiction, car le membre de droite de cette inégalité serait strictement inférieur à :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k \leq \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1$$

Donc $|\xi| \leq 2\rho$. Cette majoration a été établie par D.E. Knuth en 1981.