Sup PCSI 2 — Exercices : polynômes (6)

Factorisation assistées (ou pas)

Q1 Montrez que le polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 2X - 1$ possède une racine réelle et deux racines non réelles. Notons a, b et c ces racines ; calculez $a^2 + b^2 + c^2$, puis $a^3 + b^3 + c^3$.

Q2 Trouvez les racines du polynôme $X^3 - 37X + 84$ sachant que la différence de deux d'entre elles vaut 1.

Q3 Trouver les racines de $X^4 + 6X^3 + 23X^2 + 34X + 26$ sachant que le produit de deux d'entre elles vaut 2.

Q4 Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $X^4 + 1$, $X^8 + X^4 + 1$, $(X^2 - X + 1)^2 + 1$ et $X^4 - X^2 - 12$.

Autour des équations algébriques

Q5 a et b sont les racines de $X^2 - sX + p$. Calculez $ab^5 + ba^5$.

Q6 a, b et c sont les racines de $X^3 + pX^2 + qX + r$. Calculez $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$.

Q7 a, b et c sont les racines de $X^3 + pX + q$. Exprimez les quantités suivantes en fonction de p et q : $a^4 + b^4 + c^4$, $a^5 + b^5 + c^5$, $a^6 + b^6 + c^6$, $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1}$, $\dfrac{a+1}{a-1} + \dfrac{b+1}{b-1} + \dfrac{c+1}{c-1}$.

Q8 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Établissez : $a + b + c = 0 \Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 = 3a^2b^2c^2 - 2(ab + bc + ca)^3$.

Q9 a, b et c sont les racines de $X^3 - X - 1$. Déterminez le polynôme unitaire dont les racines sont a^3, b^3 et c^3 ; en déduire $a^6 + b^6 + c^6$.

Q10 a, b et c sont les racines de $X^3 + pX + q$. Construire le polynôme unitaire dont les racines sont $(a + b)^2$, $(b + c)^2$ et $(c + a)^2$.

Q11 Résolvez dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) = 28 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Q12 Résolvez dans $\mathbb{C}$ le système : $a^2 + b^2 + c^2 = 0$; $a^4 + b^4 + c^4 = 0$; $a^5 + b^5 + c^5 = 2$.

Q13 Déterminez $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que les racines a, b et c de $X^3 + 2X^2 - 7X + \lambda$ vérifient $a^2 = b^2 + c^2$.

Q14 Factorisez $X^5 - 209X + 56$ sur $\mathbb{Q}[X]$, sachant que deux de ses racines ont pour produit 1.

Q15 Résolvez $\begin{cases} X + Y + Z = 9 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 35 \\ X^3 + Y^3 + Z^3 = 153 \end{cases}$ Résoudre $\begin{cases} X + Y + Z = 6 \\ XY + YZ + ZX = 11 \\ XYZ = 6 \end{cases}$

Q16 Résoudre $\begin{cases} XY = 144 \\ \sqrt{X} + \sqrt{Y} = 7 \end{cases}$ Résoudre $\begin{cases} X^3 + Y^3 = a^3 + b^3 \\ X + Y = a + b \end{cases}$

Q17 Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} x^3 + y^3 = -1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$. *Indication* : posant $s = x + y$, écrire une équation algébrique dont s est racine, et mettre en évidence une racine… évidente.

Q18 Écrire une CNS sur p et q pour que $X^5 + 2X^2 - 2X + 1$ prenne des valeurs égales pour les racines de $X^3 + pX + q$.

Q19 Énoncez et démontrez une CNS sur p et q pour que les images dans le plan complexe des racines de X^3+pX+q soient les sommets d'un triangle isocèle rectangle.

Q20 Énoncez et démontrez une CNS portant sur les complexes a, b et c pour qu'une des racines de X^3+aX^2+bX+c soit moyenne arithmétique des deux autres.

Relations entre coefficients et racines

$\boxed{\text{Q21}}$ Notons a, b et c les racines de X^3+X+1. Calculez $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ et $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$.

$\boxed{\text{Q22}}$ Factorisez $(X+i)^n-(X-i)^n$. En déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\Big(4+\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2m+1}\Big)$.

$\boxed{\text{Q23}}$ Oral ESIM 1993. Soit $n \geqslant 1$. Factorisez $P_n=(X+1)^{2n}-(X-1)^{2n}$; en déduire des expressions simples de $S_n=\displaystyle\sum_{1\leqslant k<n}\tan^2\Big(\frac{k\pi}{2n}\Big)$ et $T_n=\displaystyle\prod_{1\leqslant k<n}\tan^2\Big(\frac{k\pi}{2n}\Big)$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples. Montrez que P' est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples.

$\boxed{\text{Q25}}$ Pour $n\geqslant 1$, notons $P_n=(X+1)^n-(X-1)^n$. Quel est le degré de P_n ? Factorisez P_n. Prouvez l'égalité $\displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant p}\operatorname{cotan}\Big(\frac{k\pi}{2p+1}\Big)=\frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

$\boxed{\text{Q26}}$ Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, notons $\zeta_k=\exp\Big(\dfrac{2ki\pi}{n}\Big)$. Calculez $\displaystyle\prod_{1\leqslant k<n}(1-\zeta_k)$.

$\boxed{\text{Q27}}$ Soient a, b, c, d quatre éléments d'un anneau commutatif. Montrez que $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ peut s'écrire comme somme de deux carrés de cet anneau. En déduire que, si $P\in\mathbb{R}[X]$ prend toutes ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors il existe des polynômes A et B à coefficients réels tels que $P=A^2+B^2$.

$\boxed{\text{Q28}}$ Factorisez le polynôme $P=X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$. Indication : ramenez-vous à un polynôme en $U=X+\dfrac{1}{X}$.

$\boxed{\text{Q29}}$ Déterminez trois complexes a, b et c vérifiant $a+b+c=1$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}=1$ et $a^2+b^2+c^2=-1$.

$\boxed{\text{Q30}}$ Soit $P\in\mathbb{K}_n[X]$, scindé. Notons $x_1,\ldots,x_n$ ses racines. Montrez que $\dfrac{P'}{P}=\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{X-x_k}$.

$\boxed{\text{Q31}}$ La société secrète du « troisième degré » se livre à de redoutables activités et ses membres se reconnaissent grâce à un code numérique qui change chaque mois suivant une formule connue d'eux seuls. À Interpol, le commissaire Lagrange n'a pas beaucoup d'éléments pour son enquête : il sait seulement que les codes pour les $3^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$, $6^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$ mois étaient respectivement 729, 1313, 901 et 1014. Néanmoins, le nom de la société secrète lui donne une idée. Il va découvrir la formule, et connaissant le code pour le $10^{\text{ème}}$ mois, il va s'infiltrer dans la société et arrêter peu à peu tous ses membres. Quelle est la formule ? Quel est le code du $10^{\text{ème}}$ mois ?

$\boxed{\text{Q32}}$ Quelles sont les dimensions d'une boîte parallélépipédique à base carrée dont le volume est $V=1875\,\text{cm}^3$ et telle que la surface de carton employée est $S=950\,\text{cm}^2$? Vous vous ramènerez à une équation du troisième degré dont vous chercherez une racine évidente.

---

2 : $3,4,-7$; **5** : $p(s^4-4ps^2+2p^2)$; **7** : $2p^2,5pq,3q^2-2p^3,\frac{p+3}{p-q+1},\frac{p+3q-3}{p+q+1}$; **10** : $X^3+2pX^2+p^2X-q^2$; **18** : $p^2=2$ et $q=2$; **19** : $50p^3=27q^2$; **31** : 5503 ; **32** : $a=15$, $b=25/3$ ou $a=10$,$b=75/4$;