Polynômes et algèbre linéaire

Q1 Soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille de polynômes vérifiant $\deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ et $\deg(P) = 0$. Montrez que cette famille est libre. Énoncez et démontrez une CNS très simple pour que cette famille soit une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q2 Proposez plusieurs méthodes pour démontrer que la famille $(X^2 + 1, X^2 + X + 1, X^2 + X)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$; mettez en œuvre chacune de ces méthodes, et comparez leurs efficacités respectives.

Q3 Pour $k \in [\![0,n]\!]$, notons $P_k = (X + k)^k$. Montrez que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q4 Pour quelle(s) valeur(s) de n le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$ est-il de dimension $n/2$?

Q5 Explicitez le noyau de la forme linéaire $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(1)$, puis celui de la forme linéaire $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P'(1)$.

Q6 Soient $n \geqslant 1$ et Φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $\Phi(P) = P(X + 1) - P$. Explicitez le noyau et l'image de Φ.

Q7 Soit P de degré n. Montrez que $P(X+1)$ est combinaison linéaire de la famille $(P^{(k)})_{0\leqslant k\leqslant n}$. Il y a au moins deux preuves différentes.

Q8 Soient $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B} = \big(X(X - 1)(X - 2)\dots(X - k + 1)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Montrez que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q9 Soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille libre de polynômes. Montrez que la famille $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, où $Q_k = P_k(X - \alpha)$, est libre.

Q10 Montrez que, pour $n \geqslant 1$, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $nP - XP' = X^{n-1}$.

Q11 Prouvez que $\Phi :\ P \mapsto (1 - 2X)P + X^2P'$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}[X]$. Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Q12 Notons $\varphi :\ P \mapsto \dfrac{P + P(1 - X)}{2}$. Montrez que $\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathbb{K}[X]\big)$. Explicitez $\varphi \circ \varphi$. Que constatez-vous ?

Q13 Notons Φ_n la fonction qui, à $P \in \mathbb{K}_n[X]$, associe $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} P^{(k)}$. Montrez que Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Explicitez la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Explicitez son automorphisme inverse. Comment généraliser ceci à $\mathbb{K}[X]$?

Un mini-problème

► Soit $B \in \mathbb{K}[X]$, de degré non nul. Notons Φ (resp. Ψ) la fonction qui, à $A \in \mathbb{K}[X]$, associe le quotient (resp. le reste) dans la division euclidienne de A par B.

Q1 Montrez que Φ et Ψ sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.

Q2 Déterminez le noyau et l'image de Φ.

Q3 Déterminez de même le noyau et l'image de Φ.

Un mini-problème

► Soient $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. Notons Φ la fonction qui, à $P \in \mathbb{K}[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

Q1 Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q2 Déterminez le noyau et l'image de Φ.

Un mini-problème

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, notons $e_k = X^k$ et $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Notons $\mathcal{B}_n = (e_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{P}_n$ la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Q1 Exprimez P_0, P_1, P_2, P_3 en fonction de e_0, e_1, e_2 et e_3.

Q2 Explicitez la matrice A_3 de la famille $\mathcal{P}_3$ dans la base $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{K}_3[X]$.

Q3 Montrez que la matrice A_n de la famille $\mathcal{P}_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire inférieure, à diagonale unité.

Q4 Que pouvez-vous en déduire au sujet de la famille $\mathcal{P}_n$?

Q5 Soit $j \in [\![0,n]\!]$. Donnez l'expression de e_j en fonction des P_k. En déduire la matrice B_n de la famille $\mathcal{B}_n$ dans la base $\mathcal{P}_n$.

Q6 Quelle relation simple existe-t-il entre les matrices A_n et B_n ?

Un mini-problème

▶ Notons $\mathcal{E}$ l'équation différentielle $4P = (X-1)P' + P''$.

Q1 Quel est nécessairement le degré d'une solution non nulle de $\mathcal{E}$?

Q2 Combien $\mathcal{E}$ possède-t-elle de solutions unitaires ?

Q3 Quelle est la dimension de l'espace des solutions de $\mathcal{E}$?

Q4 Soit P une solution non nulle de $\mathcal{E}$; calculez les $\widetilde{P}^{(k)}(1)$; en déduire les solutions de $\mathcal{E}$.

Un mini-problème

▶ Notons Φ la fonction qui, à $P \in \mathbb{K}[X]$, associe $P(X+1) + P(X-1) - 2P$.

Q1 Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré n. Quel est le degré de $\Phi(P)$?

Q3 Explicitez le noyau et l'image de P.

Q4 Étudiez l'endomorphisme Φ_n induit par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q5 Calculez $\Phi(X^k)$ pour $k \in [\![0,5]\!]$ et résolvez l'équation $\Phi(P) = X^3 + 3X + 1$.

Q6 Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrez qu'il existe un et un seul polynôme P vérifiant $\Phi(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

1 : $\deg(P_n) = n$; **7** : formule de Taylor ou, plus directement : les $P^{(k)}$ sont à degrés échelonnés ; **12** : φ est un projecteur ; **2** : MiniPb : $\ker(\Phi) = \mathbb{R} \cdot (X^3 + X^2 + X)$, $\mathrm{im}(\Phi) = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-X, X^3-X^2)$;