Sup PCSI 2 — Exercices : polynômes (3)

Ordre de multiplicté des racines

Q1 Déterminez l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme $P = X^5-5X^4+14X^3-22X^2+17X-5$.

Q2 Le réel 2 est racine de $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$. Quel est son ordre de multiplicité ?

Q3 Montrez que $P = X^5 - X^2 + 1$ possède une et une seule racine réelle ; prouvez qu'elle n'est pas rationnelle.

Q4 Montrez que $X^4 - 3X + 1$ possède exactement deux racines réelles.

Q5 Le polynôme $X^4 + X + 1$ possède-t-il des racines réelles ? des racines complexes ? des racines multiples ?

Q6 Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X + 1)^7 - X^7 - a$ possède-t-il une racine double réelle ?

Q7 Le réel 1 est racine de $R_n = X^{n+1} - (n + 1)X + n$. Quel est son ordre de multiplicité ?

Q8 Le polynôme $P_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{X^k}{k!}$ possède-t-il des racines multiples ? Indication : relation simple entre P_n et P_n'.

Q9 Déterminez tous les polynômes P de degré 3 au plus qui vérifient $P(0) = P(1) = 1$, $P'(0) = 0$ et $P'(1) = -1$.

Factorisations très faciles

Q10 Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $X^6 + 1$.

Q11 Quelles sont les racines du polynôme $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$?

Q12 Factorisez $P = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Q13 Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $\left(X^2 - 3X + 2\right)^2 + X^2$.

Q14 Factorisez $X^3 - X^2 - 8X + 12$ sachant qu'il possède une racine multiple.

Q15 Factorisez $2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + (1 - 3i)$ sachant qu'il possède une racine réelle.

Q16 Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = 6X^4 + X^3 + (6i + 10)X^2 + (2 + i)X - (4 + 2i)$ sachant qu'il possède *des* racines réelles.

Q17 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 12X + 8$ sachant que -2 est racine double de P.

Factorisations moins faciles

Q18 Factorisez $P = X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Q19 Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $(X + 1)^6 + (X - 1)^6$.

Q20 Factorisez $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$, sachant qu'il possède *des* racines doubles.

Q21 Explicitez les racines du polynôme $X^{10} + X^5 + 1$.

Q22 Notons $P = 4X^4 - 12X^3 + 10X^2 - 3X + 9/4$. Factorisez P sachant qu'une de ses racines est de la forme $\alpha/2$ où α est un naturel impair.

Q23 Quelles sont les racines du polynôme $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} 3^k(1 - X)^{3n-2k}X^k$?

8 : non ; **16** : $(3X + 2)(2X - 1)(X^2 + 2 + i)$; **23** : les racines cubiques de l'unité, avec comme ordre n ;