Division euclidienne

Q1 ♡ Effectuez la division euclidienne de $A = X^6 - 4X^4 + 7X^3 + X^2 - X + 2$ par $B = X^3 + 2X^2 - 5X + 3$.

Q2 ♡ Effectuez la division euclidienne de $A = X^5 - 3X^4 + 2X^2 - 5X + 17$ par $B = 3X^2 - 2X + 5$.

Q3 ♡ Nous savons que le reste dans la division euclidienne de P par $X - 1$ (resp. $X - 2$) est égal à 7 (resp. 3). Déterminez le reste dans la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)$.

Q4 ♡ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimez en fonction de $P(\alpha)$ et $P'(\alpha)$ le reste dans la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^2$.

Q5 Exercice idiot : déterminez $P \in \mathbb{R}_3[X]$ sachant que les restes dans les divisions euclidiennes de P par $X - 1$, $X + 1$, $X - 2$ sont tous trois égaux à 3.

Q6 Exercice intelligent : P a pour restes respectifs 3, 7 et 13 dans les divisions euclidiennes par $X + 1$, $X + 2$ et $X + 3$. Déterminez son reste dans la division euclidienne par $(X + 1)(X + 2)(X + 3)$.

Q7 Quels sont les couples (a, b) de scalaires tels que $(X - 1)^2$ divise le polynôme $P_n = aX^{n+1} + bX^n + 1$? Explicitez le quotient dans la division euclidienne de P_n par $(X - 1)^2$.

Q8 Quel est le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X - 4$?

Q9 Quel est le reste dans la division euclidienne de $(X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par $(X - 2)^2$?

Q10 Quel est le reste dans la division euclidienne de $(X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par $(X - 3)(X - 2)$?

Q11 Explicitez le reste dans la division euclidienne d'un polynôme P par $(X - a)(X - b)$, pour $a \neq b$; par $(X - a)^2$; par $(X - a)^3$.

Un mini-problème

► Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P_n = \cos\big((n - 1)\varphi\big)X^{n+1} - \cos(n\varphi)X^n - \cos(\varphi)X + 1$. Notons également $B = X^2 - 2\cos(\varphi)X + 1$. Nous nous proposons de montrer que B divise P_n, puis de déterminer le quotient Q_n dans la division euclidienne de P_n par B.

Q1 Rappelez les formules qui permettent de transformer les produits $\cos(p)\cos(q)$, $\sin(p)\sin(q)$ et $\sin(p)\cos(q)$ en sommes.

Q2 Rappelez les formules qui permettent de transformer les sommes $\cos(a)+\cos(b)$ et $\sin(a)+\sin(b)$ en produits.

Q3 Simplifiez $P_n(e^{i\varphi})$.

Q4 Montrez que B divise P_n.

Q5 Donnez une expression « agréable » de $P_{n+1} - P_n$.

Q6 En déduire, avec un télescopage, une expression simple de Q_n.

Un mini-problème

► Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P_n = \big(X\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\big)^n$. Nous nous proposons de déterminer le reste R_n dans la division euclidienne de P_n par $X^2 + 1$.

Q1 Que pouvez-vous dire du degré de R_n ?

Q2 Calculez $P_n(i)$

Q3 En déduire l'expression de R_n.

---

1 : $Q = X^3 - 2X^2 + 5X - 16$, $R = 64X^2 - 96X + 50$; **2** : $Q = X^3/3 - 7X^2/9 - 29X/27 + 101/81$, $R = 232X/81 + 872/81$; **8** : $\frac{(4^n-(-1)^n)X+4^n+4(-1)^n}{5}$; **9** : $4n - 1 - 2nX$; **10** : -1 ;