Résolution d'équations dans $\mathbb{K}[X]$

$\boxed{\text{Q1}}$ Que peut-on dire de P si $XP = 0$?

$\boxed{\text{Q2}}$ P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$. Que peut-on dire de P et Q si $P^2 + Q^2 = 0$? Et si P et Q sont dans $\mathbb{C}[X]$?

$\boxed{\text{Q3}}$ ♡ Résolvez dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation $Q^2 = XP^2$. Remarque : X n'est pas l'inconnue...

$\boxed{\text{Q4}}$ ♡ Trois polynômes P, Q, R à coefficients réels vérifient $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrez que tous trois sont nuls. *Indication* : parité, signe...

$\boxed{\text{Q5}}$ Résolvez dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation $(X^2+1)P'' = 6P$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Déterminez tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifient $(P')^2 = 4P$; puis ceux qui vérifient $PP'' = \big(P'\big)^2$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Déterminez tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = 18P'P''$, puis les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = 19P'P''$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Déterminez tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifient $P \circ P = P$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez qu'il existe un et un seul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) + P(X) = 2X^n$. Quel est le degré de P ? Quel est son coefficient dominant ?

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez qu'il existe un et un seul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = 2X^n$. Quel est le degré de P ? Quel est son coefficient dominant ?

$\boxed{\text{Q11}}$ Résolvez dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = (X^2+1)P$. L'ensemble des solutions est-il stable pour l'addition des polynômes ? pour la multiplication ?

$\boxed{\text{Q12}}$ P, Q et R sont trois polynômes à coefficients réels qui vérifient $(X^3+1)P^2 - XQ^2 = X^3R^2 - 2X^2QR$. Déterminez P, Q et R.