

Résolution d'équations dans $\mathbb{K}[X]$

- Q1 Que peut-on dire de P si $XP = 0$?
- Q2 P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$. Que peut-on dire de P et Q si $P^2 + Q^2 = 0$? Et si P et Q sont dans $\mathbb{C}[X]$?
- Q3 ♡ Résolvez dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation $Q^2 = XP^2$. Remarque : X n'est pas l'inconnue...
- Q4 ♡ Trois polynômes P, Q, R à coefficients réels vérifient $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrez que tous trois sont nuls.
Indication : parité, signe...
- Q5 Résolvez dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation $(X^2 + 1)P'' = 6P$.
- Q6 Déterminez tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifient $(P')^2 = 4P$; puis ceux qui vérifient $PP'' = (P')^2$.
- Q7 Déterminez tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = 18P'P''$, puis les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = 19P'P''$.
- Q8 Déterminez tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifient $P \circ P = P$.
- Q9 Montrez qu'il existe un et un seul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) + P(X) = 2X^n$. Quel est le degré de P ? Quel est son coefficient dominant ?
- Q10 Montrez qu'il existe un et un seul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = 2X^n$. Quel est le degré de P ? Quel est son coefficient dominant ?
- Q11 Résolvez dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P$. L'ensemble des solutions est-il stable pour l'addition des polynômes ? pour la multiplication ?
- Q12 P, Q et R sont trois polynômes à coefficients réels qui vérifient $(X^3 + 1)P^2 - XQ^2 = X^3R^2 - 2X^2QR$. Déterminez P, Q et R .