Degré, coefficient dominant, développement de polynômes

Q1 Déterminez le degré et le coefficient dominant de $P_n = (X-2)^n - (X+5)^n$.

Q2 Déterminez le degré et le coefficient dominant de $Q_n = \prod_{0 \leqslant k \leqslant n} (2X-k)$.

Q3 ♡ Développez et ordonnez selon les puissances décroissantes le produit de $A = 4X^5 + 3X^4 - X^2 + 7X + 2$ par $B = X^3 + 8X^2 - 5X + 12$.

Q4 Donnez une expression *très simple* du polynôme $P_n = \big(1+X\big)\big(1+X^2\big)\big(1+X^4\big)\dots\big(1+X^{2^n}\big)$.

Q5 Explicitez le coefficient de X^k dans le polynôme $Q_n = \big(1+X+X^2+\cdots+X^n\big)^2$. Vous distinguerez plusieurs cas selon la valeur de k.

Q6 Explicitez le coefficient de X^k dans le polynôme $R_n = \big(1+X+X^2+\cdots+X^n\big)\big(1+2X+3X^2+\cdots+nX^{n-1}\big)$.

Q7 Définissons une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par les relations $P_0 = X$ et $P_{n+1} = (P_n-2)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de P_n ? Déterminez le terme constant a_n de P_n, puis les coefficients b_n de X et c_n de X^2 dans l'expression de P_n.

Petites questions bizarres

Q1 On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Soit P un polynôme tel que $f(x)P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de P ?

Q2 On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell > 0$. Soit P un polynôme tel que $f(x)P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de P ?

Q3 ♡ Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\widetilde{P}$ soit périodique. Montrez que P est constant. Indication : utilisez le théorème de Rolle.

Q4 À part le polynôme nul, existe-t-il des polynômes P à coefficients réels qui vérifient $P(x) + P(x^2) = 0$ pour une infinité de valeurs de x ?

Q5 À part le polynôme nul, existe-t-il des polynômes P à coefficients réels qui vérifient $P(x) + P(x^2) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Q6 À part le polynôme nul, existe-t-il des polynômes P à coefficients réels qui vérifient $P(x) + P(x^2) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$?

Q7 Pour quels réels k existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $e^{kix} = P(e^{ix})$?

Q8 Donnez la définition d'un polynôme irréductible. Soit $P = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k X^k$, de degré n. Notons P^* le polynôme $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_{n-k} X^k$. Montrez que P est irréductible ssi P^* l'est.

Q9 Pour quel(s) n existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sin(nx) = P\big(\sin(x)\big)$?

Q10 Existe-t-il un polynôme P vérifiant $P(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in [0,1]$?

Q11 ⋆⋆ Nous disposons des polynômes $X^2 + X$ et $X^2 + 2$. Nous avons le droit d'effectuer des additions, des soustractions et des multiplications de polynômes dont nous disposons. Pouvons-nous obtenir le polynôme X ?

---

3 : $4X^8 + 35X^7 + 4X^6 + 32X^5 + 35X^4 + 63X^3 - 31X^2 + 74X + 24$; **7** : $a_n = 4$; $b_n = -4^n$ pour $n \geqslant 1$; $c_n = \frac{4^{2n-1} - 4^{n-1}}{3}$; **10** : non, observez les dérivées d'ordre $4n$ des deux membres en 0 ;