Énoncé

Notons $A = X^3 + pX + q$ et a, b, c les racines de A. Construisez le polynôme unitaire $B = X^3 + rX^2 + sX + t$ dont les racines sont $(a+b)^2$, $(b+c)^2$ et $(c+a)^2$.

Corrigé

Méthode pédestre

Appliquons laborieusement la méthode du cours.
$r = -\big((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\big) = -2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca) = -2(a+b+c)^2 + 2(ab+bc+ca) = 2p$.
$s = (a+b)^2(b+c)^2 + (b+c)^2(c+a)^2 + (c+a)^2(a+b)^c = \cdots$: franchement, qui a envie de continuer ?

Méthode expéditive

Observons que $a+b+c=0$, donc $(a+b)^2 = (-c)^2 = c^2$. Ceci facilite considérablement les calculs :
$r = -(a^2+b^2+c^2) = -(a+b+c)^2 + 2(ab+bc+ca) = 2p$
$s = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) = p^2$
$t = -a^2b^2c^2 = q^2$
Nous en déduisons $B = X^3 + 2pX^2 + p^2X + q^2$.

Vérification sur un exemple

$p = -19$ et $q = 30$. Les racines sont 2, 3 et -5 : leur somme est bien nulle.

Nous obtenons $r = -38 = 2p$, $s = 361 = 19^2 = p^2$ et $t = 900 = 30^2 = q^2$.

Donc $B = X^3 - 38X^2 + 361X - 900$: nous vérifions facilement que les racines sont $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ et $25 = (-5)^2$.