$\boxed{\text{PCSI2 — Exercices : plan complexe}}$

$\boxed{\text{Q1}}$ Déterminez l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\big|(1+i)z - 2i\big| = 2$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit A d'affixe a, et $\vec{u}$ d'affixe $\omega \neq 0$. Montrez que $M(z)$ appartient à la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ ssi $z\overline{\omega} - \overline{z}\omega = a\overline{\omega} - \overline{a}\omega$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit A d'affixe a et $r \geqslant 0$. Montrez que $M(z)$ appartient au cercle de centre A et de rayon r ssi $z\overline{a} + \overline{z}a = |z|^2 + |a|^2 - r^2$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Énoncez et démontrez une CNS portant sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ pour que les images de a, b, c, d soient les sommets d'un parallélogramme.

$\boxed{\text{Q5}}$ Énoncez et démontrez une CNS portant $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour que les images de a, b, c soient les sommets d'un triangle équilatéral.

$\boxed{\text{Q6}}$ Déterminez l'image par $f : M(z) \to M'(z^2)$: (i) d'une parallèle à l'axe réel ; (ii) d'une perpendiculaire à l'axe réel.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. Prouvez que, si deux des rapports $\dfrac{a-d}{b-c}$, $\dfrac{b-d}{c-a}$ et $\dfrac{c-d}{a-b}$ sont imaginaires purs, le troisième l'est également.

$\boxed{\text{Q8}}$ $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Prouvez que, si deux des rapports $\dfrac{bc-ac-ab}{a^2}$, $\dfrac{ca-ba-bc}{b^2}$ et $\dfrac{ab-cb-ca}{c^2}$ sont réels, le troisième l'est également.

$\boxed{\text{Q9}}$ Lieu de $M(z)$ tel que $A(1)$, $M(z)$ et $M'(1+z^2)$ soient alignés. Lieu de $M(z)$ tel que $B(i)$, $M(z)$ et $M'(iz)$ soient alignés ; lorsque M décrit ce lieu, quel est le lieu décrit par M' ?

$\boxed{\text{Q10}}$ Soit $f : M(z) \to M'\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$. Déterminez l'image par f d'une droite passant par O, puis l'image d'un cercle centré en O.

$\boxed{\text{Q11}}$ $(ABCD)$ est un quadrilatère convexe, à l'extérieur duquel on construit les triangles isocèles rectangles (ABM), (BCN), (CDP), (DAQ), d'hypothénuses respectives AB, BC, CD et DA. Montrez que $[MP]$ et $[NQ]$ sont orthogonaux et de même longueur.

$\boxed{\text{Q12}}$ Déterminez l'image par $f : M(z) \to M'\Big(\dfrac{z+2i}{1-iz}\Big)$ (i) d'une parallèle à l'axe réel ; (ii) d'une perpendiculaire à l'axe réel ; (iii) d'un cercle de centre O ; (iv) d'une droite issue de O.

$\boxed{\text{Q13}}$ Find every $Z \in \mathbb{C}$ such that the images of Z and its cube roots in the complex plane are the vertices of a parallelogram.

$\boxed{\text{Q14}}$ Déterminez $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que O, $A(a)$, $B(b)$ et $C(ab)$ soient, dans cet ordre, les sommets d'un carré.

$\boxed{\text{Q15}}$ Déterminez le lieu de $M(z)$ tel que $\Big(\dfrac{z}{z-1}\Big)^6 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q16}}$ TINTIN a trouvé dans les caves du château de Moulinsart un vieux manuscrit indiquant qu'une caisse contenant d'importants écrits de Pierre DE FERMAT est cachée sur l'ilôt des Nilpotents. Voici la teneur du manuscrit :

> « *Du palmier, marche en comptant tes pas vers la source, puis, tournant de 90° à droite, compte le même nombre de pas et plante un piquet ; reviens au palmier, et, cette fois, marche, toujours en comptant tes pas, jusqu'au tertre ; là, tournant à 90° à gauche, compte le même nombre de pas et plante un deuxième piquet. Si tu creuses exactement à mi-chemin des deux piquets, le trésor tu trouveras* ».

Ausitôt, TINTIN et le capitaine s'embarquent sur le *Sirius*, mais, arrivés sur l'ilôt, plus de palmier ! La source et le tertre, par contre, sont toujours là. TINTIN, qui est nul en mathématiques, s'apprête à repartir. Heureusement, HADDOCK, pour obtenir son brevet de capitaine, avait étudié la géométrie... Saurez-vous, comme lui, retrouver les précieux parchemins ?