Sup PCSI 2 — Groupes (2)

Q1 Notons $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrez que l'ensemble des $f_{a,b}$ est un groupe pour la composition des fonctions. Ext-il commutatif ?

Q2 Montrez que l'ensemble G des fractions de la forme $\dfrac{1+2a}{1+2b}$, où a et b sont dans $\mathbb{Z}$, est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}^*$. Montrez ensuite que l'ensemble des fractions de la forme $\dfrac{1+2a}{1+2b}$ est un sous-groupe de G.

Q3 Notons $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et définissons sur G une opération notée $\star$ et définie comme suit : $(a, b)\star(c, d) = (ac, ad+b)$. Montrez que $(G, \star)$ est un groupe non commutatif.

Q4 Quels sont les sous-groupes *finis* de $(\mathbb{R}, +)$? Et ceux de $(\mathbb{R}^*, \times)$?

Q5 Existe-t-il des parties de $\mathbb{R}$ qui contiennent 0 et qui sont des groupes pour la multiplication ?

Q6 Montrez que les trois permutations $u = \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4}$, $v = \tau_{1,3} \circ \tau_{2,4}$ et $w = \tau_{1,4} \circ \tau_{2,3}$ engendrent un sous-groupe H de $\mathfrak{S}_4$. Citez un groupe connu isomorphe à H.

Q7 Pour $x \in \mathbb{R}^*$, notons $\mathcal{M}(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$. Montrez que l'ensemble $\mathcal{K}$ des matrices $\mathcal{M}(x)$ est un groupe pour la multiplication. Donnez des exemples de sous-groupes de $\mathcal{K}$.

Q8 Notons G l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrez que $(G, \times)$ est un sous-groupe du groupe $GL_2(\mathbb{R})$.

Q9 Notons H l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ et $ad - bc \neq 0$; H est-il un sous-groupe du groupe $GL_2(\mathbb{R})$?

Q10 Préliminaire : soit $p \in \mathbb{Z}$; montrez que $p\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Quel est plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ contenant 1 ? contenant 2 ? Même question pour le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Q11 $\star\star$ Un ensemble G non vide est muni d'une loi $*$ associative, et pour laquelle tout élément de G est régulier. Montrez que $(G, *)$ est un groupe.

Q12 $\star\star$ Soit G un groupe tel que la fonction $x \in G \mapsto x^3$ soit un morphisme surjectif de G. Montrez que G est commutatif.

Q13 $\star\star$ G est un groupe fini ; φ est un morphisme involutif de G, dont le seul point fixe est le neutre e de G. Que pouvez-vous dire de l'ordre de G ? Montrez que la fonction $t \in G \mapsto t\big(\varphi(t)\big)^{-1}$ est bijective ; en déduire que G est commutatif.

Q14 $\star\star$ Un ensemble E est muni d'une loi $*$ associative, possédant un neutre à droite e (tel que $x * e = x$ pour tout $x \in E$) et telle que tout $x \in E$ possède un symétrique à droite x' (tel que $x * x' = e$). Montrez que $(E, *)$ est un groupe. Donnez un exemple prouvant que l'hypothèse « E est fini » est nécessaire.

---

4 : $\{0\}$; $\{1\}$ et $\{1, -1\}$; **5** : $\{0\}$; **7** : le neutre est $\mathcal{M}(1/2)$; l'inverse de $\mathcal{M}(x)$ est $\mathcal{M}(1/4x)$; **10** : $\mathbb{Z}$; $2\mathbb{Z}$; $\{1\}$; $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; **12** : $baba = aabb$, $a^2b^3 = b^3a^2$, $(ab)^2 = b^2a^2$, $ba^2 = a^2b$; **13** : $|G|$ est impair ; l'injectivité de φ est claire ; **14** : $x' * x * x' = x'$, donc $x' * x = e$;
