Sup PCSI 2 — Exercices : groupes (1)

Q1 Un groupe G, noté multiplicativement, vérifie $x^2 = e$ quel que soit $x \in G$. Prouvez que G est commutatif.

Q2 Un groupe G, noté multiplicativement, vérifie : $(xy)^2 = x^2y^2$ quels que soient $x, y \in G$. Prouvez que G est commutatif.

Q3 Prouvez qu'un groupe G est commutatif ssi la fonction $x \to x^{-1}$ est un automorphisme de G.

Q4 Deux éléments x et y d'un groupe G vérifient $xy^2 = y^2x$ et $xy^3 = y^3x$. Montrez que x et y commutent.

Q5 Deux éléments x et y d'un groupe G vérifient $xy^2 = y^2x$. x et y commutent-ils nécessairement ?

Q6 Soit G un groupe noté multiplicativement, de neutre e. Deux éléments a et b de G vérifient $a^4 = e$ et $ab = ba^3$. Montrez que $a^2b = ba^2$ puis $a^3b = ba$.

Q7 Notons $f_1 : t > 0 \mapsto t$, $f_2 : t > 0 \mapsto -t$, $f_3 : t > 0 \mapsto 1/t$ et $f_4 : t > 0 \mapsto -1/t$. Montrez que $G = (\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ est un groupe.

Q8 Soit $(G, \star)$ un groupe. Le *centre* de G est l'ensemble noté $\mathrm{Cent}(G)$ des éléments $x \in G$ qui vérifient $x \star y = y \star x$ pour tout $y \in G$; en clair, un élément est dans le centre de G ssi il commute avec tout le monde. Prouvez que $\mathrm{Cent}(G)$ est un sous-groupe commutatif de G.

Q9 Définissons sur $\mathbb{R}^2$ une loi $*$ par $(a, b) * (c, d) = (a + c, be^c + de^{-a})$. Montrez que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ? Donnez une expression simple de $(1, 1)^n$.

Q10 Soit G un groupe fini, de cardinal n. Soit p le nombre d'éléments de G qui sont leur propre inverse. Que pouvez-vous dire de la parité de p ?

Q11 $\star\star$ Prouvez que la réunion $H \cup K$ de deux sous-groupes H et K d'un même groupe G, est elle-même un sous-groupe de G, si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Q12 $\star\star$ H et K sont deux sous-groupes d'un même groupe G, tous deux distincts de G. Montrez que $H \cup K$ est strictement contenu dans G.

Q13 $\star\star$ Deux éléments x et y d'un groupe G vérifient $(xy)^n = x^ny^n$, $(xy)^{n+1} = x^{n+1}y^{n+1}$ et $(xy)^{n+2} = x^{n+2}y^{n+2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrez que x et y commutent.

Q14 Trois éléments x, y et z d'un groupe G vérifient $x^3 = y^2$, $y^3 = z^2$ et $z^3 = x^2$. e est le neutre de G. Montrez successivement que $x^{19} = e$, $y = x^{-8}$ et $z = x^7$.

Compléments

Les contrôles 2001/05, 2003/05 et 2005/05 contiennent chacun un petit problème sur les groupes. En particulier, le contrôle 2001/05 vous fera découvrir la notion de *groupe défini par des générateurs et des relations*.

---

10 : n et p ont même parité ; **14** : $x^{27} = y^{18} = z^{12} = x^8$; $y = y^{20} = x^{30} = x^{-8}$; $z = z^{-18} = x^{-12} = x^7$;