

Énoncé

Notons $s(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale du naturel n , par exemple $s(275) = 14$. Calculez $(s \circ s \circ s)(4444^{4444})$.

Corrigé

Pour abrégé, nous noterons $N = 4444^{4444}$.

Nous noterons $a \equiv b \pmod{q}$ lorsque q divise $a - b$; cette phrase se lit « a est égal à b modulo q ». Ceci revient à dire qu'il existe un relatif k tel que $a = b + kq$.

Lemme : si $a \equiv b \pmod{q}$ et $c \equiv d \pmod{q}$, alors $ac \equiv bd \pmod{q}$.

Preuve : il existe des relatifs k et k' tels que $a = b + kq$ et $c = d + k'q$. Nous en déduisons $ac = (b + kq)(d + k'q) = bd + q(kd + k'b + kk'q)$, donc $ac \equiv bd \pmod{q}$.

Corollaire : si $a \equiv b \pmod{q}$, alors $a^k \equiv b^k \pmod{q}$, et ce quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Preuve : immédiate, par récurrence sur k .

Lemme : n et $s(n)$ ont même reste dans la division par 9.

Preuve : notons $\overline{d_p d_{p-1} \dots d_1 d_0}$ l'écriture décimale de n . Alors $n = \sum_{0 \leq k \leq p} 10^k d_k$ et $s(n) = \sum_{0 \leq k \leq p} d_k$. Par différence, il vient $n - s(n) = \sum_{0 \leq k \leq p} (10^k - 1)d_k$; mais chaque facteur $10^k - 1$ est divisible par 9 (grâce au corollaire établi plus haut), donc $n - s(n)$ l'est aussi.

Remarquons que $4444 \equiv 7 \pmod{9}$, donc $N \equiv 7^{4444} \pmod{9}$.

Mais $7^2 = 49 \equiv 4 \pmod{9}$ et $7^3 = 343 \equiv 1 \pmod{9}$; donc $7^{3k} \equiv 1 \pmod{9}$ et ce, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Comme $4444 \equiv 7 \pmod{9}$, il vient $7^{4444} \equiv 7 \pmod{9}$.

Par suite, $(s \circ s \circ s)(N) \equiv 7 \pmod{9}$.

Observons maintenant que $N < 10000^{4444} = 10^{17776}$, donc $s(N) \leq 9 \times 17776 = 159984$.

Nous en déduisons $(s \circ s)(N) \leq \max_{1 \leq k \leq 159984} s(k) = s(99999) = 45$.

Enfin, $(s \circ s \circ s)(N) \leq \max_{1 \leq k \leq 45} s(k) = s(39) = 12$.

Nous pouvons conclure : $(s \circ s \circ s)(N)$ est compris entre 1 et 12, et $(s \circ s \circ s)(N) \equiv 7 \pmod{9}$. Donc :

$$\boxed{(s \circ s \circ s)(4444^{4444}) = 7}$$

Remarques

Cet exercice a été posé aux *Olympiades internationales de mathématiques* (en 1976, me semble-t-il).