Aspects géométriques des nombres complexes.

Le pentagone régulier, version 1

Q1 Exprimez $\cos(5\alpha)$ et $\sin(5\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

Q2 En déduire des expressions de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Q3 En déduire la construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

Le pentagone régulier, version 2

Q1 Montrez que les solutions de l'équation $z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} = 0$ sont les racines cinquièmes de 1 autres que 1.

Q2 Déduire de cette équation une nouvelle équation dans laquelle l'inconnue est $U = z + z^{-1}$.

Q3 Résolvez cette équation en U.

Q4 En déduire des expressions des cosinus et sinus de $\pi/5$ et $\pi/10$.

Q5 En déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

Bac C Orléans–Tours 1976

Q1 Déterminez l'ensemble E_1 des points M du plan complexe, dont l'affixe z vérifie $z^2 - (1+i)^2 = \overline{z}^2 - (1-i)^2$. Construisez cet ensemble.

Q2 Déterminez l'ensemble E_2 des points M du plan complexe, dont l'affixe z vérifie $\big(z-(1+i)\big)\big(\overline{z}-(1-i)\big) = 8$. Construisez cet ensemble.

Q3 Vérifiez qu'il existe un point de $E_1 \cap E_2$ où les deux courbes ont même tangente.

Une (més)aventure de Tintin

Q1 Tintin a trouvé dans les caves du château de Moulinsart un vieux manuscrit indiquant qu'une caisse contenant d'importants écrits de Pierre de Fermat est cachée sur l'îlôt des Nilpotents. Voici la teneur du manuscrit :

> « *Du palmier, marche en comptant tes pas vers la source, puis, tournant de 90° à droite, compte le même nombre de pas et plante un piquet ; reviens au palmier, et, cette fois, marche, toujours en comptant tes pas, jusqu'au tertre ; là, tournant à 90° à gauche, compte le même nombre de pas et plante un deuxième piquet. Si tu creuses exactement à mi-chemin des deux piquets, le trésor tu trouveras* ».

Ausitôt, Tintin et le capitaine s'embarquent sur le *Sirius*, mais, arrivés sur l'ilôt, plus de palmier ! La source et le tertre, par contre, sont toujours là. Tintin, qui est nul en mathématiques, s'apprête à repartir. Heureusement, Haddock, pour obtenir son brevet de capitaine, avait étudié la géométrie... Saurez-vous, comme lui, retrouver les précieux parchemins ?