Aspects géométriques des nombres complexes.

Questions en vrac

Q1 Soient u et v deux complexes ; prouvez l'égalité $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2\big(|u|^2+|v|^2\big)$. Interprétez géométriquement.

Q2 u, z et z' sont trois complexes qui vérifient $u^2 = zz'$. Établissez l'égalité $|z|+|z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\dfrac{z+z'}{2}-u\right|$.

Q3 Résolvez l'équation $(2Z+1)^4 = (Z-1)^4$ et vérifiez que les images des solutions sont cocycliques.

Q4 Déterminez l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\big|(1+i)z-2i\big| = 2$.

Q5 Soit A d'affixe a, et $\vec{u}$ d'affixe $\omega \neq 0$. Montrez que $M(z)$ appartient à la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ ssi $z\overline{\omega} - \overline{z}\omega = a\overline{\omega} - \overline{a}\omega$.

Q6 Soit A d'affixe a et $r \geqslant 0$. Montrez que $M(z)$ appartient au cercle de centre A et de rayon r ssi $z\overline{a} + \overline{z}a = |z|^2 + |a|^2 - r^2$.

Q7 Énoncez et démontrez une CNS portant sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ pour que les images de a, b, c, d soient les sommets d'un parallélogramme.

Q8 Énoncez et démontrez une CNS portant $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour que les images de a, b, c soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Q9 Déterminez l'image par $f : M(z) \to M'(z^2)$: (i) d'une parallèle à l'axe réel ; (ii) d'une perpendiculaire à l'axe réel.

Q10 Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. Prouvez que, si deux des rapports $\dfrac{a-d}{b-c}$, $\dfrac{b-d}{c-a}$ et $\dfrac{c-d}{a-b}$ sont imaginaires purs, le troisième l'est également.

Q11 $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Prouvez que, si deux des rapports $\dfrac{bc-ac-ab}{a^2}$, $\dfrac{ca-ba-bc}{b^2}$ et $\dfrac{ab-cb-ca}{c^2}$ sont réels, le troisième l'est également.

Q12 Lieu de $M(z)$ tel que $A(1)$, $M(z)$ et $M'(1+z^2)$ soient alignés. Lieu de $M(z)$ tel que $B(i)$, $M(z)$ et $M'(iz)$ soient alignés ; lorsque M décrit ce lieu, quel est le lieu décrit par M' ?

Q13 Soit $f : M(z) \to M'\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big)$. Déterminez l'image par f d'une droite passant par O, puis l'image d'un cercle centré en O.

Q14 $(ABCD)$ est un quadrilatère convexe, à l'extérieur duquel on construit les triangles isocèles rectangles (ABM), (BCN), (CDP), (DAQ), d'hypothénuses respectives AB, BC, CD et DA. Montrez que $[MP]$ et $[NQ]$ sont orthogonaux et de même longueur.

Q15 Déterminez l'image par $f : M(z) \to M'\Big(\dfrac{z+2i}{1-iz}\Big)$ (i) d'une parallèle à l'axe réel ; (ii) d'une perpendiculaire à l'axe réel ; (iii) d'un cercle de centre O ; (iv) d'une droite issue de O.

Q16 Déterminez $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que O, $A(a)$, $B(b)$ et $C(ab)$ soient, dans cet ordre, les sommets d'un carré.

Q17 Déterminez le lieu de $M(z)$ tel que $\Big(\dfrac{z}{z-1}\Big)^6 \in \mathbb{R}$.

---

3 : -2, $\frac{-1+3i}{5}$, 0 et $\frac{-1-3i}{5}$;