Trigonométrie

Q1 En utilisant l'une des formules commençant par $\cos(2x) = \cdots$, formez une équation du second degré dont $\cos(\pi/12)$ est solution, puis déterminez le cosinus et le sinus de $\pi/12$.

Q2 En notant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, retrouvez *très rapidement* les résultats de l'exercice précédent.

Q3 $\star$ Montrez que, si $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$, alors $\operatorname{Re}\Big(\dfrac{1}{1-z}\Big) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Q4 $\star\star$ Donnez une expression simple de $C = \displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant 7} \cos\Big(\frac{k\pi}{15}\Big)$. Indication : évaluez numériquement C avec votre calculatrice ; faites intervenir le produit S des sinus.

Q5 Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\omega_k = \exp\Big(\dfrac{2ki\pi}{n}\Big)$. Calculez $|\omega_k - 1|$; en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} |\omega_k - 1|$;.

Q6 Pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, notons $\zeta_{n,k} = \exp\Big(\dfrac{2ki\pi}{n}\Big)$. Que pensez-vous de $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k < n} (\zeta_{n,k})^3$?

Q7 Prouver la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k(\alpha)} = \frac{\sin\big((2n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)\cos^{2n}(\alpha)}$. Donnez une formule analogue pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\sin(k\alpha)}{\sin^k(\alpha)}$.

Autour de l'heptaèdre régulier

Q1 Notons $z = \exp\Big(\dfrac{2i\pi}{7}\Big)$, $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$. Prouver que S et T sont conjugués, puis que la partie imaginaire de S est strictement positive. Calculez $S + T$ et ST, en déduire S et T.

Q2 $\star$ Soit $\beta = \exp\Big(\dfrac{2i\pi}{7}\Big)$. Quelle est la valeur de $\dfrac{\beta}{1+\beta^2} + \dfrac{\beta^2}{1+\beta^4} + \dfrac{\beta^3}{1+\beta^6}$?

Q3 $\star\star$ Développez $(Z+1)^7$, puis résolvez $Z^6 + 21Z^4 + 35Z^2 + 7 = 0$. Donnez alors une expression simple de $\tan(\pi/7)\tan(2\pi/7)\tan(4\pi/7)$.

Mini-problème

► Notons $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^4 - 4iz^3 + (3 - 12i)z^2 - (24 + 14i)z + 12 - 36i$. Nous nous intéressons à l'équation $f(z) = 0$, que nous noterons $(\mathcal{E})$.

Q1 Montrez que $(\mathcal{E})$ possède deux solutions imaginaires pures, que vous calculerez.

Q2 Déterminez les autres solutions de $(\mathcal{E})$.

Q3 Représentez, dans le plan complexe, les images des solutions de $(\mathcal{E})$.

Q4 Que pouvez-vous dire du polygone dont les sommets sont les images des solutions de $(\mathcal{E})$?

---

4 : 2^{-7} ; **1** : $S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $T = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$; **2** : -2 ;