Sup PCSI2 — Exercices : complexes (2)

Calculs de racines carrées, résolution d'équations

Racines carrées (et autres)

Q1 Quelles sont les racines carrées complexes de $40-42i$?

Q2 Calculez les racines carrées complexes de $u=15-112i$, puis celles de $v=112-66i$.

Q3 Soient a et b deux réels ; quelles sont les racines carrées complexes de $4ab+2(a^2-b^2)i$? Indication : réponse en quatre lignes.

Q4 Calculez les racines carrées de $z=\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$ puis celles de $w=1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$.

Q5 Déterminez les racines cubiques de $a=-2+2i$, puis les racines quatrièmes de $b=-8+8i\sqrt{3}$.

Q6 Calculez les racines quatrièmes de $-7+24i$ et de $-119+120i$.

Équations

Q7 Résolvez l'équation $(1-i)Z-3i\overline{Z}=1+4i$. Indication : utilisez la forme algébrique.

Q8 Résolvez l'équation $Z^2=\overline{Z}^4$, puis l'équation $|Z|=Z+\overline{Z}$. Indication : utilisez dans chaque cas la forme adaptée !

Q9 Soit $a\in\mathbb{R}$. Résolvez l'équation $Z^2-2(1+a^2)Z+1-a^4=0$.

Q10 Résolvez l'équation $Z^4+Z^2+1=0$, puis l'équation $Z^{2n}+Z^n+1=0$.

Q11 Résolvez l'équation $Z^4-30Z^2+289=0$.

Q12 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-\big((\sqrt{3}+i)+(-1+i)\big)z+(\sqrt{3}+i)(-1+i)=0$. *Remarque* : on peut répondre en trois lignes, sans aucun calcul. Source : bac E, juin 1980, Bordeaux.

Q13 Résolvez l'équation $(1+i)Z^2-(7+13i)Z+2+60i=0$.

Q14 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^3+(7-4i)z^2-(15+14i)z+30i=0$ sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure.

Q15 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+2(3-2i)z^2+(8-15i)z+3-11i=0$ sachant qu'elle possède une solution réelle. Source : bac C, 1977, Besançon.

Q16 Déterminez deux complexes a et b tels que la fonction $f\,:\,z\in\mathbb{C}\mapsto z^3+az^2+bz-42+24i$ vérifie $f(1)=-44+32i$ et $f(-1)=-30+16i$. Résolvez alors l'équation $f(z)=0$, sachant qu'une des solutions est réelle ; notant u, v et w les trois solutions, calculez le module et l'argument de $uv+vw+wu$.

Q17 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-(1+2i)z^2-(1-9i)z-2(1+5i)=0$ sachant qu'elle possède une solution réelle. Source : bac C, juin 1980, Nouvelle-Calédonie, S.H.N.

Q18 Notons $f\,:\,z\in\mathbb{C}\mapsto z^3+(-7+3i)z^2+(12-16i)z+4(1+7i)$. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$, sachant qu'une de ses solutions est imaginaire pure. Source : bac C, juin 1979, Nantes.

Q19 Résolvez l'équation $Z^3-(4+6i)Z^2-(4-20i)Z+16-16i=0$, sachant qu'elle possède une solution réelle.

Q20 Soit $\alpha\in\,]0,\pi[$. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2\sin^2(\alpha)-4z\sin(\alpha)+4+\cos^2(\alpha)=0$. Source : bac C, juin 1980, Lyon.

Équations diverses

Q21 Existe-t-il des complexes a et b tels que $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$? Si oui, quels sont ces nombres ?

Q22 Soit $a\in\mathbb{R}$. Résolvez dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}\cos(a)+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0\\ \sin(a)+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0\end{cases}$

---

1 : $7-3i$ et $-7+3i$; **7** : $-\frac{9+8i}{7}$; **11** : $\pm4\pm i$; **13** : $7-2i$ et $3+5i$; **14** : $-5, 3/2, 2i$; **22** : $\{x,y\}=\{2\pi/3,4\pi/3\}$;
