

Calculs de racines carrées, résolution d'équations

Racines carrées (et autres)

- Q1 Quelles sont les racines carrées complexes de $40 - 42i$?
- Q2 Calculez les racines carrées complexes de $u = 15 - 112i$, puis celles de $v = 112 - 66i$.
- Q3 Soient a et b deux réels ; quelles sont les racines carrées complexes de $4ab + 2(a^2 - b^2)i$? Indication : réponse en quatre lignes.
- Q4 Calculez les racines carrées de $z = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}}$ puis celles de $w = 1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.
- Q5 Déterminez les racines cubiques de $a = -2 + 2i$, puis les racines quatrièmes de $b = -8 + 8i\sqrt{3}$.
- Q6 Calculez les racines quatrièmes de $-7 + 24i$ et de $-119 + 120i$.

Équations

- Q7 Résolvez l'équation $(1 - i)Z - 3i\bar{Z} = 1 + 4i$. Indication : utilisez la forme algébrique.
- Q8 Résolvez l'équation $Z^2 = \bar{Z}^4$, puis l'équation $|Z| = Z + \bar{Z}$. Indication : utilisez dans chaque cas la forme adaptée !
- Q9 Soit $a \in \mathbb{R}$. Résolvez l'équation $Z^2 - 2(1 + a^2)Z + 1 - a^4 = 0$.
- Q10 Résolvez l'équation $Z^4 + Z^2 + 1 = 0$, puis l'équation $Z^{2n} + Z^n + 1 = 0$.
- Q11 Résolvez l'équation $Z^4 - 30Z^2 + 289 = 0$.
- Q12 Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - ((\sqrt{3} + i) + (-1 + i))z + (\sqrt{3} + i)(-1 + i) = 0$. *Remarque* : on peut répondre en trois lignes, sans aucun calcul. Source : bac E, juin 1980, Bordeaux.
- Q13 Résolvez l'équation $(1 + i)Z^2 - (7 + 13i)Z + 2 + 60i = 0$.
- Q14 Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $2z^3 + (7 - 4i)z^2 - (15 + 14i)z + 30i = 0$ sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure.
- Q15 Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $z^3 + 2(3 - 2i)z^2 + (8 - 15i)z + 3 - 11i = 0$ sachant qu'elle possède une solution réelle. Source : bac C, 1977, Besançon.
- Q16 Déterminez deux complexes a et b tels que la fonction $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^3 + az^2 + bz - 42 + 24i$ vérifie $f(1) = -44 + 32i$ et $f(-1) = -30 + 16i$. Résolvez alors l'équation $f(z) = 0$, sachant qu'une des solutions est réelle ; notant u, v et w les trois solutions, calculez le module et l'argument de $uv + vw + wu$.
- Q17 Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $z^3 - (1 + 2i)z^2 - (1 - 9i)z - 2(1 + 5i) = 0$ sachant qu'elle possède une solution réelle. Source : bac C, juin 1980, Nouvelle-Calédonie, S.H.N.
- Q18 Notons $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^3 + (-7 + 3i)z^2 + (12 - 16i)z + 4(1 + 7i)$. Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$, sachant qu'une de ses solutions est imaginaire pure. Source : bac C, juin 1979, Nantes.
- Q19 Résolvez l'équation $Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (4 - 20i)Z + 16 - 16i = 0$, sachant qu'elle possède une solution réelle.
- Q20 Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $z^2 \sin^2(\alpha) - 4z \sin(\alpha) + 4 + \cos^2(\alpha) = 0$. Source : bac C, juin 1980, Lyon.

Équations diverses

- Q21 Existe-t-il des complexes a et b tels que $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$? Si oui, quels sont ces nombres ?
- Q22 Soit $a \in \mathbb{R}$. Résolvez dans \mathbb{R}^2 le système $\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$

1 : $7 - 3i$ et $-7 + 3i$; **7** : $-\frac{9+8i}{7}$; **11** : $\pm 4 \pm i$; **13** : $7 - 2i$ et $3 + 5i$; **14** : $-5, 3/2, 2i$; **22** : $\{x, y\} = \{2\pi/3, 4\pi/3\}$;
