Si vous pensez que votre professeur est sévère, attendez de voir votre patron.

Forme algébrique

Q1 Mettez sous forme algébrique $\dfrac{(1+2i)(3-2i)}{(3-i)(4-3i)}$ et $\dfrac{(1+3i)^3}{(4-3i)^2}$.

Q2 Mettez sous forme algébrique $\dfrac{2-3i}{1+e^{i\pi/3}}$.

Q3 Notons $u=1-2i$. Mettez sous forme algébrique le nombre $U=u+u^3+u^5$.

Q4 Calculez le module et l'argument de $1+i$, $1-i$, $1+i\sqrt{3}$, $\dfrac{1+i}{1-i}$, $(2+2i)(\sqrt{3}-i)\big(\sin(\pi/7)+i\cos(\pi/7)\big)$, $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$, $(1+i)^{1991}$, $1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ et $\dfrac{1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}$.

Q5 Soit $\varphi\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Déterminez le module et l'argument de $z_\varphi=\dfrac{1+i\tan(\varphi)}{1-i\tan(\varphi)}$.

Module et argument

Q6 Calculez le module et l'argument de $z=\big(\cos(\pi/7)+i\sin(\pi/7)\big)\big(1-i\sqrt{3}\big)(1+i)$.

Q7 Calculez le module et l'argument de $z=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\big(\cos(7\pi/12)+i\sin(7\pi/12)\big)$.

Q8 Notons $v=\dfrac{\sqrt{3}+i}{i-1}$. Mettez sous forme algébrique le nombre $V=v^{2002}$.

Q9 Mettez sous forme algébrique le complexe $W=\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{999}}{(-1+i)^{2004}}$.

Q10 Soient $(a,b)\in\mathbb{U}^2$ avec $ab\neq-1$; montrez que $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Q11 Notons $a=\exp\left(\dfrac{7i\pi}{11}\right)$, $b=\sqrt{3}+i$ et $c=\exp\left(\dfrac{3i\pi}{8}\right)$. Mettez sous forme exponentielle $V=\dfrac{a^9b^8}{c^{17}}$.

Q12 Déterminez le module et l'argument de $u=(1+i)^{2008}$, puis de $v=\big(1+i\sqrt{3}\big)^{2009}$.

Q13 Déterminez le module et l'argument de $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$: (i) par le calcul ; (ii) géométriquement.

Q14 Montrez que si $u\in\mathbb{U}\setminus\{-1\}$, alors il existe un réel a tel que $u=\dfrac{1-ia}{1+ia}$. Exprimez a en fonction de $\arg(u)$.

Q15 Soient $a,b\in\mathbb{U}^2$, $a\neq b$, et $z\in\mathbb{C}$. Montrez que $\dfrac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}$ est imaginaire pur.

Divers

Q16 Déterminer les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Q17 Déterminer les parties finies de $\mathbb{C}$ stables pour la multiplication.

Q18 Notons $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ l'ensemble des complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont dans $\mathbb{Q}$. Montrez que tout complexe z est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$.

Q19 Prouver que la suite de terme général $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k)$ est bornée.

Q20 $\star\star$ Soient a, b, n des naturels. Prouvez qu'il existe des naturels p et q tels que $(a^2+b^2)^n=p^2+q^2$.

---

1 : $\frac{11+127i}{250}i$ et $\frac{2-6i}{5}$; **2** : $1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$; **3** : $31+38i$; **6** : $|z|=2\sqrt{2}$, $\arg(z)=(5\pi/84)$; **7** : $|z|=1$, $\arg(z)=(\pi/3)$; **11** : $256\exp\left(\frac{181i\pi}{264}\right)$;
