

*Si vous pensez que votre professeur est sévère, attendez de voir votre patron.*

### Forme algébrique

- Q1 Mettez sous forme algébrique  $\frac{(1+2i)(3-2i)}{(3-i)(4-3i)}$  et  $\frac{(1+3i)^3}{(4-3i)^2}$ .
- Q2 Mettez sous forme algébrique  $\frac{2-3i}{1+e^{i\pi/3}}$ .
- Q3 Notons  $u = 1 - 2i$ . Mettez sous forme algébrique le nombre  $U = u + u^3 + u^5$ .
- Q4 Calculez le module et l'argument de  $1+i$ ,  $1-i$ ,  $1+i\sqrt{3}$ ,  $\frac{1+i}{1-i}$ ,  $(2+2i)(\sqrt{3}-i)(\sin(\pi/7) + i\cos(\pi/7))$ ,  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$ ,  $(1+i)^{1991}$ ,  $1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$  et  $\frac{1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}$ .
- Q5 Soit  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Déterminez le module et l'argument de  $z_\varphi = \frac{1+i\tan(\varphi)}{1-i\tan(\varphi)}$ .

### Module et argument

- Q6 Calculez le module et l'argument de  $z = (\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7))(1-i\sqrt{3})(1+i)$ .
- Q7 Calculez le module et l'argument de  $z = \frac{\sqrt{2}}{1+i}(\cos(7\pi/12) + i\sin(7\pi/12))$ .
- Q8 Notons  $v = \frac{\sqrt{3}+i}{i-1}$ . Mettez sous forme algébrique le nombre  $V = v^{2002}$ .
- Q9 Mettez sous forme algébrique le complexe  $W = \frac{(1-i\sqrt{3})^{999}}{(-1+i)^{2004}}$ .
- Q10 Soient  $(a, b) \in \mathbb{U}^2$  avec  $ab \neq -1$ ; montrez que  $\frac{a+b}{1+ab}$  est réel.
- Q11 Notons  $a = \exp\left(\frac{7i\pi}{11}\right)$ ,  $b = \sqrt{3} + i$  et  $c = \exp\left(\frac{3i\pi}{8}\right)$ . Mettez sous forme exponentielle  $V = \frac{a^9 b^8}{c^{17}}$ .
- Q12 Déterminez le module et l'argument de  $u = (1+i)^{2008}$ , puis de  $v = (1+i\sqrt{3})^{2009}$ .
- Q13 Déterminez le module et l'argument de  $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$  : (i) par le calcul ; (ii) géométriquement.
- Q14 Montrez que si  $u \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ , alors il existe un réel  $a$  tel que  $u = \frac{1-ia}{1+ia}$ . Exprimez  $a$  en fonction de  $\arg(u)$ .
- Q15 Soient  $a, b \in \mathbb{U}^2$ ,  $a \neq b$ , et  $z \in \mathbb{C}$ . Montrez que  $\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}$  est imaginaire pur.

### Divers

- Q16 Déterminer les sous-groupes finis de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
- Q17 Déterminer les parties finies de  $\mathbb{C}$  stables pour la multiplication.
- Q18 Notons  $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$  l'ensemble des complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont dans  $\mathbb{Q}$ . Montrez que tout complexe  $z$  est limite d'une suite d'éléments de  $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ .
- Q19 Prouver que la suite de terme général  $U_n = \sum_{k=0}^n \cos(k)$  est bornée.
- Q20 ★ Soient  $a, b, n$  des naturels. Prouvez qu'il existe des naturels  $p$  et  $q$  tels que  $(a^2 + b^2)^n = p^2 + q^2$ .

---

**1** :  $\frac{11+127i}{250}i$  et  $\frac{2-6i}{5}$  ; **2** :  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$  ; **3** :  $31 + 38i$  ; **6** :  $|z| = 2\sqrt{2}$ ,  $\arg(z) = (5\pi/84)$  ; **7** :  $|z| = 1$ ,  $\arg(z) = (\pi/3)$  ; **11** :  $256 \exp\left(\frac{181i\pi}{264}\right)$  ;

---