PCSI2 — Exercices d'arithmétique

Primalité

Q1 Pour $n \geqslant 2$, montrez que $5^n - 3^n$ est composé.

Q2 Montrez que, quel que soit le naturel n, il existe un entier A tel qu'aucun des éléments de l'intervalle discret $[\![A,A+n]\!]$ ne soit premier.

Q3 Prouvez que, pour tout naturel premier $p > 5$, 240 divise $p^4 - 1$.

Q4 Soit $n \geqslant 3$. Montrez que $2^n - 1$ et $2^n + 1$ ne sont pas simultanément premiers.

Q5 Montrez que, si p est premier, alors $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.

Q6 Existe-t-il des naturels n tels que $n^4 + n^2 + 1$ soit premier ?

Q7 Montrez que, si n n'est pas premier, alors $2^n - 1$ n'est pas premier.

Q8 p est premier ; a, b, c et d sont des naturels. p divise $a - b$ et $c - d$; montrez que p divise $ac - bd$. Généralisez ceci à n différences $x_i - y_i$.

Q9 Une preuve du « petit » théorème de Fermat. Soit p premier. Soient u et v deux naturels ; montrez que p divise $(u+v)^p - u^p - v^p$. En déduire que p divise $(x_1 + \cdots + x_n)^p - {x_1}^p - \cdots - {x_n}^p$. En déduire que p divise $n^p - n$.

Q10 Soient $x_1, \ldots, x_n$ des entiers distincts ; montrez que, si aucun de ces entiers n'est divisible par un nombre premier au moins égal à 5, alors $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{x_k} < 3$.

Q11 Soit $b \geqslant 2$. Notons Q_n le naturel dont l'écriture en base b est constituée de n chiffres 1. Montrez que, si Q_n est premier, alors n est prmier.

Factorisation et divisibilité

Q12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Se peut-il que $n+1$ divise $n^2 + 1$?

Q13 Quel est le plus grand entier qui divise tous les nombres de la forme $n^3 - n$?

Q14 Soit a un naturel impair. Montrez que 2^{n+3} divise $a^{2^{n+2}} - 1$.

Q15 Dans la factorisation de $100!$, quel est l'exposant de 3 ?

Q16 Déterminez le nombre de zéros par lesquels se termine l'écriture décimale de $100\,!$.

Q17 Quel est le plus petit entier possédant exactement quinze diviseurs ?

Q18 Montrez qu'un naturel est un carré parfait ssi il possède un nombre impair de diviseurs.

Q19 Soient a un naturel et p un diviseur premier de a. Montrez que l'expression $f(a,p) = \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor$ a bien un sens. Montrez que l'exposant de p dans la décomposition de a en produit de facteurs premiers est $f(a,p)$.

Q20 Montrez que la nombre $\dfrac{(5n)!}{40^n \times n!}$ est entier.

Q21 Soient n un entier et ${p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2} \ldots {p_k}^{e_k}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. Notons $d(n)$ le nombre de diviseurs de n et $s(n)$ la somme de ces diviseurs. Donnez des expressions de $d(n)$ et $s(n)$ en fonction des e_j et des p_j.

$\boxed{\text{Q22}}$ Notons $s(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale du naturel n, par exemple $s(275) = 14$. Calculez $(s \circ s \circ s)(4444^{4444})$. (Olympiades)

$\boxed{\text{Q23}}$ a et b sont deux naturels. Prouvez que 7 divise $a^2 + b^2$ si et seulement si 7 divise a et b. Indication : effectuez la division euclidienne de a et b par 7.

$\boxed{\text{Q24}}$ a et b sont deux naturels. Si $a^2 - b^2$ est premier, que peut-on en déduire concernant a et b ? La réciproque est-elle vraie ?

$\boxed{\text{Q25}}$ Soient a, b et c trois naturels. Montrez que, si $a^3 + b^3 + c^3$ est multiple de 7, alors abc est multiple de 7.

$\boxed{\text{Q26}}$ Existe-t-il des triplets (x, y, z) de naturels tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 7$ soit multiple de 8 ?

Bases

$\boxed{\text{Q27}}$ Quelle est l'écriture de $3^n - 1$ en base 3 ?

$\boxed{\text{Q28}}$ Montrez que, dans le développement décimal d'un irrationnel, il existe au moins deux chiffres qui apparaissent une infinite de fois.

$\boxed{\text{Q29}}$ Par quels chiffres peut se terminer l'écriture décimale d'un carré parfait ?

$\boxed{\text{Q30}}$ Déterminez une base b dans laquelle le nombre 10000 (en écriture décimale) s'écrit 14641.

$\boxed{\text{Q31}}$ Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9^{2n+1} + 8^{n+2}$ est multiple de 73.

$\boxed{\text{Q32}}$ Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 15n - 1$ est multiple de 9.

Equations diophantiennes

$\boxed{\text{Q33}}$ Résolvez dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $x^2 - y^2 = 1976$.

$\boxed{\text{Q34}}$ Résolvez dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $x^3 - y^3 = 2716$.

Nombre de Mersenne

► Un nombre de Mersenne est un naturel de la forme $M_q = 2^q - 1$, avec q premier. Ces nombres ne sont pas tous premiers ; la recherche de nombres de Mersenne premiers a suscité un vif intérêt pour le calcul réparti.

$\boxed{\text{Q35}}$ Quel est le plus petit exposant q tel que M_q soit composé ?

$\boxed{\text{Q36}}$ En 1952, Robinson découvre un nombre de Mersenne dont l'écriture décimale nécessite 157 chiffres. Quelle était la valeur de q ? Vous pouvez utiliser une calculatrice.

$\boxed{\text{Q37}}$ Le 23 août 2008 a été annoncée la découverte d'un nouveau nombre de Mersenne, plus grand que tous ceux découverts avant cette date. La longueur de l'écriture décimale de ce nombre est de 12978189. Quel est l'exposant q de ce nombre ?

► Marin Mersenne a joué le rôle de « secrétaire » d'une Académie informelle, de par sa correspondance avec les érudits de son époque. La lecture de la notice que lui consacre Wikipedia est vivement recommandée.

15 : 48 ; **16** : 24 ; **22** : 7 ; **33** : 493 ± 1, 247 ± 2, 38 ± 13, 26 ± 19 ; **34** : $x = 17$, $y = 13$; **36** : $q = 521$; **37** : 43112609 ;