Sup PCSI 2 — TD : éléments nilpotents d'un anneau

► Un élément x d'un anneau A est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$. Le plus petit exposant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de x ; nous le noterons $\nu(x)$. Remarque : ν est la lettre grecque *nu* ; ce n'est pas un v.

Q1 Nous nous plaçons dans l'anneau $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Montrez que la matrice $M = \Omega_{1,2} + \Omega_{2,3}$ est nilpotente, et déterminez son indice de nilpotence.

Q2 Prouvez que, si $x \neq 0$ est nilpotent, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k \neq 0$ pour $k < p$, et $x^k = 0$ pour $k \geqslant p$.

Q3 Exhibez deux éléments P et Q nilpotents de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui ne commutent pas, et tels que $P + Q$ ne soit pas nilpotent.

Q4 Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que si P est nilpotente, alors P^T est elle aussi nilpotente, et a même indice de nilpotence que P.

► Soient x et y deux éléments nilpotents d'un anneau A ; on suppose que x et y commutent.

Q5 Montrez que $x + y$ est nilpotent. *Indication* : utilisez la formule du binôme.

Q6 Quelle relation pouvez-vous écrire entre les indices de nilpotence respectifs de x, y et $x + y$?

► Soient s et t deux éléments d'un anneau A ; on ne sait pas si s et t commutent.

Q7 Quelle relation simple existe-t-il entre $(st)^{k+1}$ et $(ts)^k$?

Q8 Prouvez que si st est nilpotent, alors ts l'est aussi.

Q9 Montrez que $\left|\nu(st) - \nu(ts)\right| \leqslant 1$. Donnez un exemple où $\nu(st) = \nu(ts)$, et un exemple où $\nu(st) \neq \nu(ts)$.

► Un élément u d'un anneau A est*unipotent* si $1 - u$ est nilpotent.

► A est un anneau *non commutatif* (sinon la suite n'est pas amusante). Soit $a \in A$ et $\varphi : x \in A \mapsto ax - xa$.

Q10 Vérifiez que φ est un homomorphisme du groupe $(A, +)$.

► Notons φ^n le n-ième itéré de φ pour la composition des applications : $\varphi^1 = \varphi$, et $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$ pour $n \geqslant 1$.

Q11 Établissez $\varphi^n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} x a^k$ pour tout $n \geqslant 1$.

Q12 En déduire que, si a est nilpotent, alors φ est nilpotent.