Anneaux

Q1 Prouvez qu'un anneau fini commutatif et intègre est un corps. Indication : que pouvez-vous dire de la fonction $x \in A \mapsto ax$, où $a \in A^*$?

Q2 Soient A et B deux anneaux. Expliquez comment munir $A \times B$ d'une structure d'anneau.

Q3 Soient $\mathbb{K}$ un corps, A un anneau et $\varphi : \mathbb{K} \mapsto A$ un morphisme d'anneaux. Prouvez que φ est injectif, et que $\varphi(\mathbb{K})$ est un corps.

Q4 Montrez que tout morphisme de corps est injectif.

Q5 Un élément x d'un anneau A commute avec tous les carrés et tous les cubes. Montrez que x commute avec tout élément de A. Indication : x commute avec $(1+y)^2$, etc.

Q6 Un anneau A vérifie la propriété suivante : $(xy)^2 = x^2y^2$ quels que soient les éléments x et y de A. Montrez que $x^2y = xyx = yx^2$, puis montrez que x et y commutent. Indication : remplacez x par $1+x$, par exemple...

Q7 Munissons $\mathbb{Z}^2$ de l'addition usuelle et d'une loi $*$ définie par $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+bc)$. Montrez que $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau commutatif. Possède-t-il des diviseurs de zéro ?

Q8 Notons E l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0 et 2. Nous dirons qu'un élément de E est premier s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même. Par exemple, 4 et 8 sont premiers. Énumérez les naturels inférieurs à 40 qui sont premiers dans E mais pas dans $\mathbb{N}$. Montrez que 64 possède plusieurs factorisations dans E.

Corps

Q9 Deux éléments x et y d'un corps $\mathbb{K}$ vérifient $x+y=-1$ et $x^{-1}+y^{-1}=1$. Prouvez l'égalité $x^4+y^4=7$.

Q10 Deux éléments x et y d'un corps $\mathbb{K}$ vérifient $x+y=-1$ et $x^{-1}+y^{-1}=1$. Prouvez l'égalité $x^5+y^5=-31$.

Q11 Notons $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des complexes de la forme $a+b\sqrt{3}$, avec a et b rationnels. Montrez que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, muni des lois $+$ et $\times$ habituelles, est un corps.

Q12 Notons $\mathbb{Q}[i]$ l'ensemble des complexes de la forme $a+ib$, avec a et b rationnels. Montrez que $\mathbb{Q}[i]$, muni des lois $+$ et $\times$ habituelles, est un corps.

Mini-problème 1

► Un anneau A vérifie $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.

Q1 Montrez que A est commutatif.

Q2 Montrez que si A possède au moins trois éléments, il n'est pas intègre.

Q3 Montrez que A ne peut contenir *exactement* trois éléments.

Q4 Un anneau B vérifie $x^6 = x$ pour tout $x \in B$. Montrez qu'il vérifie aussi $x^2 = x$ pour tout $x \in B$.

Q5 Montrez que $(x+y)z = 0 \iff \big[x(y+1)z = 0 \text{ et } (x+1)yz = 0\big]$.

Mini-problème 1

► Un anneau A vérifie $x^3 = x$ pour tout $x \in A$. Nous nous proposons de montrer que A est commutatif.

Q1 Notons $f(x,y) = (x+y)^3 - x^3 - y^3$. Établissez la formule. $f(x, y+z) = xyz + yzx + zxy + xzy + zyx + yxz$

Q2 Posez $z = xy - yx$ et faites apparaître $xf(x,y) - f(x,y)x$ pour conclure.