**Anneaux**

Q1 Prouvez qu'un anneau fini commutatif et intègre est un corps. Indication : que pouvez-vous dire de la fonction $x \in A \mapsto ax$, où $a \in A^*$ ?

Q2 Soient $A$ et $B$ deux anneaux. Expliquez comment munir $A \times B$ d'une structure d'anneau.

Q3 Soient $\mathbb{K}$ un corps, $A$ un anneau et $\varphi : \mathbb{K} \mapsto A$ un morphisme d'anneaux. Prouvez que $\varphi$ est injectif, et que $\varphi(\mathbb{K})$ est un corps.

Q4 Montrez que tout morphisme de corps est injectif.

Q5 Un élément $x$ d'un anneau $A$ commute avec tous les carrés et tous les cubes. Montrez que $x$ commute avec tout élément de $A$. Indication : $x$ commute avec $(1+y)^2$, etc.

Q6 Un anneau $A$ vérifie la propriété suivante : $(xy)^2 = x^2y^2$ quels que soient les éléments $x$ et $y$ de $A$. Montrez que $x^2y = xyx = yx^2$, puis montrez que $x$ et $y$ commutent. Indication : remplacez $x$ par $1+x$, par exemple...

Q7 Munissons $\mathbb{Z}^2$ de l'addition usuelle et d'une loi $*$ définie par $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$. Montrez que $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau commutatif. Possède-t-il des diviseurs de zéro ?

Q8 Notons $E$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0 et 2. Nous dirons qu'un élément de $E$ est premier s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même. Par exemple, 4 et 8 sont premiers. Énumérez les naturels inférieurs à 40 qui sont premiers dans $E$ mais pas dans $\mathbb{N}$. Montrez que 64 possède plusieurs factorisations dans $E$.

**Corps**

Q9 Deux éléments $x$ et $y$ d'un corps $\mathbb{K}$ vérifient $x + y = -1$ et $x^{-1} + y^{-1} = 1$. Prouvez l'égalité $x^4 + y^4 = 7$.

Q10 Deux éléments $x$ et $y$ d'un corps $\mathbb{K}$ vérifient $x + y = -1$ et $x^{-1} + y^{-1} = 1$. Prouvez l'égalité $x^5 + y^5 = -31$.

Q11 Notons $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des complexes de la forme $a + b\sqrt{3}$, avec $a$ et $b$ rationnels. Montrez que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, muni des lois $+$ et $\times$ habituelles, est un corps.

Q12 Notons $\mathbb{Q}[i]$ l'ensemble des complexes de la forme $a + ib$, avec $a$ et $b$ rationnels. Montrez que $\mathbb{Q}[i]$, muni des lois $+$ et $\times$ habituelles, est un corps.

## Mini-problème 1

▶ Un anneau $A$ vérifie $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.

Q1 Montrez que $A$ est commutatif.

Q2 Montrez que si $A$ possède au moins trois éléments, il n'est pas intègre.

Q3 Montrez que $A$ ne peut contenir *exactement* trois éléments.

Q4 Un anneau $B$ vérifie $x^6 = x$ pour tout $x \in B$. Montrez qu'il vérifie aussi $x^2 = x$ pour tout $x \in B$.

Q5 Montrez que $(x + y)z = 0 \iff \big[x(y + 1)z = 0 \text{ et } (x + 1)yz = 0\big]$.

## Mini-problème 1

▶ Un anneau $A$ vérifie $x^3 = x$ pour tout $x \in A$. Nous nous proposons de montrer que $A$ est commutatif.

Q1 Notons $f(x, y) = (x + y)^3 - x^3 - y^3$. Établissez la formule. $f(x, y + z) = xyz + yzx + zxy + xzy + zyx + yxz$

Q2 Posez $z = xy - yx$ et faites apparaître $xf(x, y) - f(x, y)x$ pour conclure.