Rappel

Une partie F d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est un s.e.v. de E si elle est non vide et vérifie :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in F : \forall \lambda \in \mathbb{K} : \vec{u} + \lambda \vec{v} \in F$$

Exemples de sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Donnez une preuve, pour chacune des situations suivantes.

- L'ensemble des fonctions constantes
- L'ensemble des fonctions paires
- L'ensemble des fonctions impaires
- L'ensemble des fonctions affines
- L'ensemble des fonctions rationnelles sans pôles réels
- L'ensemble des fonctions polynômes
- L'ensemble des fonctions qui s'annulent en x_0
- L'ensemble des fonctions lipschitziennes
- L'ensemble des fonctions Tpériodiques, avec $T \neq 0$
- L'ensemble des fonctions dont la limite en $+\infty$ est zéro
- L'ensemble des fonctions dérivables sur un intervalle I
- L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- L'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe α et β réels tels que $f(x) - \alpha x - \beta \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
- L'ensemble des fonctions bornées
- L'ensemble des fonctions f qui vérifient $f(x) = o(x^{-n})$ lorsque x tend vers $+\infty$

Exemples d'ensembles qui ne sont pas des s.e.v. de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Donnez une preuve, pour chacune des situations suivantes.

- L'ensemble des fonctions croissantes
- L'ensemble des fonctions monotones
- L'ensemble des fonctions convexes
- L'ensemble des fonctions croissantes
- L'ensemble des fonctions k-lipschitziennes