

## Énoncé (Oral Air 2001)

► Deux projecteurs  $f$  et  $g$  d'un même  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  vérifient  $\text{im}(f) \subset \text{ker}(g)$ .

Q1 Que pouvez-vous dire de  $g \circ f$  ?

► Notons  $\tau = f + g - f \circ g$ .

Q2 Montrez que  $\tau$  est un projecteur.

Q3 Montrez que  $\text{ker}(\tau) = \text{ker}(f) \cap \text{ker}(g)$ .

Q4 Montrez que  $\text{im}(f)$  et  $\text{im}(g)$  sont en somme directe.

Q5 Montrez que  $\text{im}(\tau) = \text{im}(f) \oplus \text{im}(g)$ .

## Corrigé

► Nous noterons  $\mathbf{0}$  l'endomorphisme nul.

Q1 Soit  $x \in E : f(x) \in \text{im}(f)$ , donc  $f(x) \in \text{ker}(g)$  soit  $g(f(x)) = \vec{0}$ , ou encore  $(g \circ f)(x) = \vec{0}$ . Ceci vaut pour tout  $x \in E$ , donc  $\boxed{g \circ f \text{ est l'endomorphisme nul}}$ .

Q2  $\tau \circ \tau = (f + g - f \circ g) \circ (f + g - f \circ g) = f \circ f + f \circ g - f \circ f \circ g + g \circ f + g \circ g - g \circ f \circ g - f \circ g \circ f - f \circ g \circ g + f \circ g \circ f \circ g$  ; chaque terme comportant le facteur  $g \circ f$  est nul ; de plus,  $f \circ f = f$  et  $g \circ g = g$ . Nous obtenons  $\tau \circ \tau = f + f \circ g - f \circ g + g - f \circ g = f + g - f \circ g = \tau$  ce qui termine la preuve :  $\boxed{\tau \text{ est un projecteur}}$ .

Q3 • Soit  $x \in \text{ker}(\tau)$  ;  $\tau(x) = \vec{0}$ , soit  $f(x) + g(x) - (f \circ g)(x) = \vec{0}$ . Si nous appliquons  $f$  aux deux membres de cette égalité, il vient  $(f \circ f)(x) + (f \circ g)(x) - (f \circ f \circ g)(x) = \vec{0}$ . En tenant compte de  $f \circ f = f$ , nous trouvons  $f(x) + (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x) = \vec{0}$ , donc  $f(x) = \vec{0}$ , soit  $x \in \text{ker}(f)$ . Mais si nous appliquons  $g$  aux deux membres de l'égalité, il vient  $(g \circ f)(x) + (g \circ g)(x) - (g \circ f \circ g)(x) = \vec{0}$ . En tenant compte de  $g \circ f = \mathbf{0}$  et  $g \circ g = g$ , nous trouvons  $g(x) = \vec{0}$ , soit  $x \in \text{ker}(g)$ . Nous avons montré que, si  $x \in \text{ker}(\tau)$ , alors  $x \in \text{ker}(f) \cap \text{ker}(g)$ . Donc  $\boxed{\text{ker}(\tau) \subset \text{ker}(f) \cap \text{ker}(g)}$ .

• Soit  $x \in \text{ker}(f) \cap \text{ker}(g)$  : nous avons  $f(x) = g(x) = \vec{0}$ . Alors  $\tau(x) = (f + g - f \circ g)(x) = f(x) + g(x) - f(g(x)) = \vec{0}$ , donc  $x \in \text{ker}(\tau)$ . Ainsi  $\boxed{\text{ker}(f) \cap \text{ker}(g) \subset \text{ker}(\tau)}$ .

• Ayant établi les deux inclusions, nous avons prouvé l'égalité  $\boxed{\text{ker}(\tau) = \text{ker}(f) \cap \text{ker}(g)}$ .

Q4 Par hypothèse,  $\text{im}(f) \subset \text{ker}(g)$  ; mais  $g$  est un projecteur, donc  $\text{ker}(g) \cap \text{im}(g) = \{\vec{0}\}$  ; à plus forte raison,  $\text{im}(f) \cap \text{im}(g) \subset \{\vec{0}\}$ . L'inclusion inverse est banale. Nous avons montré  $\text{im}(f) \cap \text{im}(g) = \{\vec{0}\}$ , autrement dit :  $\boxed{\text{les deux s.e.v. } \text{im}(f) \text{ et } \text{im}(g) \text{ sont en somme directe}}$ .

Q5 • Soit  $y \in \text{im}(\tau)$  : il existe  $x \in E$  tel que  $y = \tau(x)$ . Alors :

$$y = (f + g - f \circ g)(x) = f(x) + g(x) - (f \circ g)(x) = f(x) + g(x) - f(g(x)) = f(x - g(x)) + g(x)$$

Clairement,  $f(x - g(x)) \in \text{im}(f)$  et  $g(x) \in \text{im}(g)$  donc  $\tau(x) \in \text{im}(f) + \text{im}(g)$ . Donc  $\boxed{\text{im}(\tau) \subset \text{im}(f) + \text{im}(g)}$ .

• Soit  $y \in \text{im}(f) + \text{im}(g)$  ; il existe  $u$  et  $v$  tels que  $y = f(u) + g(v)$ . Montrer que  $y$  est dans  $\text{im}(\tau)$  revient à vérifier que  $\tau(y) = y$ . En exploitant les égalités  $f \circ f = f$ ,  $g \circ f = \mathbf{0}$  et  $g \circ g = g$  nous trouvons :

$$\begin{aligned} \tau(y) &= (f + g - f \circ g)(f(u) + g(v)) \\ &= (f \circ f)(u) + (f \circ g)(v) + (g \circ f)(u) + (g \circ g)(v) - (f \circ g \circ f)(u) - (f \circ g \circ g)(v) \\ &= f(u) + (f \circ g)(v) + g(v) - (f \circ g)(v) = f(u) + g(v) = y \end{aligned}$$

Ceci démontre l'inclusion  $\boxed{\text{im}(f) + \text{im}(g) \subset \text{im}(\tau)}$ .

• Ayant établi les deux inclusions, nous avons prouvé l'égalité  $\boxed{\text{im}(\tau) = \text{im}(f) + \text{im}(g)}$ .