Sup PCSI2 — TD : d'autres petites questions sur les matrices

► A et B sont deux matrices. **I** désigne la matrice identité. Parmi les affirmations suivantes, dire lesquelles sont vraies (preuve à l'appui), et lesquelles sont fausses (contre-exemple à l'appui). La majeure partie des questions provient du site de mon collègue Bernard Ycart.

Q1 Si le produit $A \times B$ existe, alors le produit $B \times A$ existe.

Q2 Si la somme $A + B$ existe, alors le produit $A \times B$ existe.

Q3 Si le produit $A \times B$ existe, alors le produit $B^T \times A^T$ existe.

Q4 Si la somme $A + B$ existe, alors le produit $A \times B^T$ existe.

Q5 Si les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent, alors la somme $A + B$ existe.

Q6 Si les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent, alors la somme $A + B^T$ existe.

Q7 $\star$ Si les produits $A \times B$ et $B^T \times A$ existent, alors la somme $A + A^T$ existe.

Q8 $\star$ Si les produits $A \times B$ et $B^T \times A$ existent, alors la somme $A + B^T$ existe.

Q9 $\star$ Si le produit $A \times B$ existe, alors la somme $A \times A^T + B \times B^T$ existe.

Q10 $\star$ Si le produit $A \times B$ existe, alors la somme $A \times A^T + B^T \times B$ existe.

Q11 $\star$ Si A est inversible, alors $A \times A^T = A^T \times A$.

Q12 Si A est inversible, alors $\mathbf{I} - A$ est inversible.

Q13 Si A est inversible, alors $A \times A^T$ est inversible.

Q14 $\star$ Si A est inversible, alors $A + A^T$ est inversible.

Q15 Si A est diagonale, alors A est inversible.

Q16 Si A est diagonale, alors A est symétrique.

Q17 Si A est diagonale, et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.

Q18 Si A est de rang r, alors toute famille de r colonnes de A est de rang r.

Q19 La matrice nulle est la seule matrice de rang nul.

Q20 Une matrice est de rang 1 si et seulement si elle possède un seul coefficient non nul.

Q21 Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors le rang de A est strictement inférieur au nombre de ses colonnes.

► Dans les questions suivantes, A est une matrice quelconque.

Q22 Le produit $A \times A$ existe.

Q23 Le produit $A \times A^T$ existe.

Q24 Si A est carrée, alors $A \times A^T = A^T \times A$.

Q25 Si $A \times A^T = A^T \times A$, alors $A = A^T$.

Q26 Si le rang de A est égal au nombre de ses colonnes, alors A est inversible.

Q27 A et A^T ont même rang.

Q28 $\star\star\star$ Si A est à coefficients réels, alors A et $A^T \times A$ ont même rang.

---

1 : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{2,3}$ et $B \in \mathcal{M}_{3,3}$; **2** : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{2,3}$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}$; **3** : VRAI ; **4** : VRAI ; **5** : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{2,3}$ et $B \in \mathcal{M}_{3,2}$; **6** : VRAI ; **7** : VRAI ; **8** : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}$, $n \neq p$; **9** : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}$, $n \neq p$; **10** : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$, $p \neq q$; **11** : FAUX : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **12** : FAUX= $A = \mathbf{I}$; **13** : VRAI ; **14** : FAUX : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; **15** : FAUX ; **16** : VRAI ; **17** : VRAI ; **18** : FAUX ; **19** : VRAI ; **20** : FAUX ; **21** : FAUX ; **22** : FAUX : $n \neq p$; **23** : VRAI ; **24** : FAUX (cf. plus haut) ; **25** : FAUX (cf. plus haut) ; **26** : FAUX ; **27** : VRAI ; **28** : VRAI : $\ker(A) \subset \ker(A^T A)$ est clair ; et $A^T A X = \mathbf{0} \Rightarrow X^T A^T A X = \mathbf{0} \Rightarrow (AX)^T AX = \mathbf{0} \Rightarrow AX = \mathbf{0}$ (produit scalaire) ;
