

► A et B sont deux matrices. \mathbf{I} désigne la matrice identité. Parmi les affirmations suivantes, dire lesquelles sont vraies (preuve à l'appui), et lesquelles sont fausses (contre-exemple à l'appui). La majeure partie des questions provient du site de mon collègue Bernard YCART.

- Q1 Si le produit $A \times B$ existe, alors le produit $B \times A$ existe.
- Q2 Si la somme $A + B$ existe, alors le produit $A \times B$ existe.
- Q3 Si le produit $A \times B$ existe, alors le produit $B^T \times A^T$ existe.
- Q4 Si la somme $A + B$ existe, alors le produit $A \times B^T$ existe.
- Q5 Si les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent, alors la somme $A + B$ existe.
- Q6 Si les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent, alors la somme $A + B^T$ existe.
- Q7 * Si les produits $A \times B$ et $B^T \times A$ existent, alors la somme $A + A^T$ existe.
- Q8 * Si les produits $A \times B$ et $B^T \times A$ existent, alors la somme $A + B^T$ existe.
- Q9 * Si le produit $A \times B$ existe, alors la somme $A \times A^T + B \times B^T$ existe.
- Q10 * Si le produit $A \times B$ existe, alors la somme $A \times A^T + B^T \times B$ existe.
- Q11 * Si A est inversible, alors $A \times A^T = A^T \times A$.
- Q12 Si A est inversible, alors $\mathbf{I} - A$ est inversible.
- Q13 Si A est inversible, alors $A \times A^T$ est inversible.
- Q14 * Si A est inversible, alors $A + A^T$ est inversible.
- Q15 Si A est diagonale, alors A est inversible.
- Q16 Si A est diagonale, alors A est symétrique.
- Q17 Si A est diagonale, et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
- Q18 Si A est de rang r , alors toute famille de r colonnes de A est de rang r .
- Q19 La matrice nulle est la seule matrice de rang nul.
- Q20 Une matrice est de rang 1 si et seulement si elle possède un seul coefficient non nul.
- Q21 Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors le rang de A est strictement inférieur au nombre de ses colonnes.

► Dans les questions suivantes, A est une matrice quelconque.

- Q22 Le produit $A \times A$ existe.
- Q23 Le produit $A \times A^T$ existe.
- Q24 Si A est carrée, alors $A \times A^T = A^T \times A$.
- Q25 Si $A \times A^T = A^T \times A$, alors $A = A^T$.
- Q26 Si le rang de A est égal au nombre de ses colonnes, alors A est inversible.
- Q27 A et A^T ont même rang.
- Q28 *** Si A est à coefficients réels, alors A et $A^T \times A$ ont même rang.

1 : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{2,3}$ et $B \in \mathcal{M}_{3,3}$; 2 : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{2,3}$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}$; 3 : VRAI ; 4 : VRAI ; 5 : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{2,3}$ et $B \in \mathcal{M}_{3,2}$; 6 : VRAI ; 7 : VRAI ; 8 : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}$, $n \neq p$; 9 : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}$, $n \neq p$; 10 : FAUX : $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$, $p \neq q$; 11 : FAUX : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
 12 : FAUX ; $A = \mathbf{I}$; 13 : VRAI ; 14 : FAUX : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 15 : FAUX ; 16 : VRAI ; 17 : VRAI ;
 18 : FAUX ; 19 : VRAI ; 20 : FAUX ; 21 : FAUX ; 22 : FAUX : $n \neq p$; 23 : VRAI ; 24 : FAUX (cf. plus haut) ; 25 : FAUX (cf. plus haut) ; 26 : FAUX ; 27 : VRAI ; 28 : VRAI : $\ker(A) \subset \ker(A^T A)$ est clair ; et $A^T A X = \mathbf{0} \Rightarrow X^T A^T A X = \mathbf{0} \Rightarrow (A X)^T A X = \mathbf{0} \Rightarrow A X = \mathbf{0}$ (produit scalaire) ;
