Sup PCSI2 — Exercices : petites questions sur les matrices

► Voici des assertions au sujet de matrices carrées d'ordre 2, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple, et en expliquant pourquoi il convient).

Q1 Si A et B sont symétriques, alors $A+B$ est symétrique.

Q2 Si A et B sont symétriques, alors AB est symétrique.

Q3 Si A et B sont inversibles, alors $A+B$ est inversible.

Q4 Si $A+B$ est inversible, alors A et B sont inversibles.

Q5 Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible.

Q6 Si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

Q7 AB et BA ont même rang.

Q8 AB et BA ont même trace.

Q9 Si $\mathrm{rg}(A)=2$, alors $\mathrm{rg}(A^2)=2$.

Q10 Si $\mathrm{rg}(A^2)=2$, alors $\mathrm{rg}(A)=2$.

Q11 Si $\mathrm{rg}(A)=1$, alors $\mathrm{rg}(A^2)=1$.

Q12 Si $\mathrm{rg}(A^2)=1$, alors $\mathrm{rg}(A)=1$.

Q13 Si $\mathrm{rg}(A)=0$, alors $\mathrm{rg}(A^2)=0$.

Q14 Si $\mathrm{rg}(A^2)=0$, alors $\mathrm{rg}(A)=0$.

Q15 Si $\mathrm{rg}(A)=0$, alors $\det(A)=0$.

Q16 Si $\det(A)=0$, alors $\mathrm{rg}(A)=0$.

Q17 Si $\det(A^2)=0$, alors $\mathrm{rg}(A)=0$.

► Dans les questions suivantes, A est une matrice carrée d'ordre 3.

Q18 Si $\mathrm{rg}(A)=2$, alors $\mathrm{rg}(A^2)=2$.

Q19 Si $\mathrm{rg}(A^2)=2$, alors $\mathrm{rg}(A)=2$.

Q20 Si $\mathrm{rg}(A)=1$, alors $\mathrm{rg}(A^2)=1$.

Q21 Si $\mathrm{rg}(A^2)=1$, alors $\mathrm{rg}(A)=1$.

Q22 Si $\mathrm{rg}(A)=0$, alors $\mathrm{rg}(A^2)=0$.

Q23 Si $\mathrm{rg}(A^2)=0$, alors $\mathrm{rg}(A)=0$.

► Dans les questions suivantes, A et B sont des matrices quelconques.

Q24 $\mathrm{rg}(AB)=\max\big(\mathrm{rg}(A),\mathrm{rg}(B)\big)$.

Q25 $\mathrm{rg}(AB)=\min\big(\mathrm{rg}(A),\mathrm{rg}(B)\big)$.

Q26 $\mathrm{rg}(AB)\leqslant\min\big(\mathrm{rg}(A),\mathrm{rg}(B)\big)$.