Q1 Quelle est l'allure d'une matrice carrée d'ordre 3 antisymétrique ? Exhibez deux matrices carrées d'ordre 3, antisymétriques, dont le produit n'est ni symétrique, ni antisymétrique. Réponse : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q2 Exhibez ue base de $\mathbb{K}_[X]$ dans laquelle la matrice D de la dérivation est décrite par la formule $D_{i,j} = \delta_{i,j+1}$. Réponse : $e_k = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$.

Q3 Notons $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit A la matrice carrée d'ordre n définie par la formule $A_{i,j} = \delta_{i,j+1}$. Donnez l'allure de A. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Exhibez une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de Φ est A^T.

Q4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que A est inversible et calculez son inverse. Donnez une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

Q5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique. Sans calculer A^2, montrez que f n'est pas une projection. Déterminez le noyau et l'image de f. Exhibez une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\Omega_{1,2}$.

Q6 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminez les matrices B telles que $A \times B$ soit la matrice nulle. Que pouvez-vous dire de l'ensemble de ces matrices ?

Q7 Au réel a, nous associons la matrice $N(a) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient a et b deux réels ; montrez qu'il existe un réel c tel que $N(a) \times N(b) = N(c)$. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $N(x) = I_3$? Énoncez une CNS portant sur a pour que $N(a)$ soit inversible ; explicitez $N(a)^{-1}$ lorsque $N(a)$ est inversible.

Q8 *Matrices circulantes*. Notons $\mathcal{MC}_3$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrez que $\mathcal{MC}_3$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Exhibez une base de $\mathcal{MC}_3$. Montrez que $\mathcal{MC}_3$ est aussi un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; est-il commutatif ?

Q9 *Matrices et polynômes*. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$ notons $B_n^k = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$. Notons $\mathcal{B}_n$ la famille de polynômes $(B_n^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$; les membres de cette famile sont les polynômes de Bernstein. Calculez la matrice de la famille $\mathcal{B}_n$ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$. Montrez que $\mathcal{B}_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q10 Au réel x nous associons la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Notons G l'ensemble des matrices $M(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'ensemble G soit un groupe.

Q11 Soit $n \geqslant 2$. Associons aux scalaires a et b la matrice $M_{a,b}$ carrée d'ordre n définie comme suit : le coefficient situé ligne i et colonne j vaut a si $i = j$, b sinon. Notons Φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont $M_{a,b}$ est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons $u_k = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k} e_i$. Montrez que la famille $\mathcal{U} = (u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Calculez la matrice de Φ dans la base $\mathcal{U}$.

Q12 Pour chacune des conditions suivantes, proposez une matrice carrée d'ordre n répondant à la condition : (1) la suite $(A^k)_{k\geqslant 1}$ est constante ; (2) la suite $(A^k)_{k\geqslant 1}$ est 2-périodique ; (3) la suite $(A^k)_{k\geqslant 1}$ est n-périodique ; (4) la suite $(A^k)_{k\geqslant 1}$ est N-périodique, avec $N > n$.