

- Q1** Quelle est l'allure d'une matrice carrée d'ordre 3 antisymétrique ? Exhibez deux matrices carrées d'ordre 3, antisymétriques, dont le produit n'est ni symétrique, ni antisymétrique. Réponse : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Q2** Exhibez une base de $\mathbb{K}[X]$ dans laquelle la matrice D de la dérivation est décrite par la formule $D_{i,j} = \delta_{i,j+1}$. Réponse : $e_k = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$.
- Q3** Notons $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de \mathbb{K}^n . Soit A la matrice carrée d'ordre n définie par la formule $A_{i,j} = \delta_{i,j+1}$. Donnez l'allure de A . Soit Φ l'endomorphisme de \mathbb{K}^n dont A est la matrice dans la base canonique de \mathbb{K}^n . Exhibez une base de \mathbb{K}^n dans laquelle la matrice de Φ est A^T .
- Q4** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que A est inversible et calculez son inverse. Donnez une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.
- Q5** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Notons f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice dans la base canonique. Sans calculer A^2 , montrez que f n'est pas une projection. Déterminez le noyau et l'image de f . Exhibez une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\Omega_{1,2}$.
- Q6** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminez les matrices B telles que $A \times B$ soit la matrice nulle. Que pouvez-vous dire de l'ensemble de ces matrices ?
- Q7** Au réel a , nous associons la matrice $N(a) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient a et b deux réels ; montrez qu'il existe un réel c tel que $N(a) \times N(b) = N(c)$. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $N(x) = I_3$? Énoncez une CNS portant sur a pour que $N(a)$ soit inversible ; explicitez $N(a)^{-1}$ lorsque $N(a)$ est inversible.
- Q8** *Matrices circulantes.* Notons \mathcal{MC}_3 l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrez que \mathcal{MC}_3 est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Exhibez une base de \mathcal{MC}_3 . Montrez que \mathcal{MC}_3 est aussi un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; est-il commutatif ?
- Q9** *Matrices et polynômes.* Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ notons $B_n^k = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$. Notons \mathcal{B}_n la famille de polynômes $(B_n^k)_{0 \leq k \leq n}$; les membres de cette famille sont les polynômes de BERNSTEIN. Calculez la matrice de la famille \mathcal{B}_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$. Montrez que \mathcal{B}_n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Q10** Au réel x nous associons la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Notons G l'ensemble des matrices $M(x)$ lorsque x décrit \mathbb{R} . Déterminer les fonctions f dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que l'ensemble G soit un groupe.
- Q11** Soit $n \geq 2$. Associons aux scalaires a et b la matrice $M_{a,b}$ carrée d'ordre n définie comme suit : le coefficient situé ligne i et colonne j vaut a si $i = j$, b sinon. Notons Φ l'endomorphisme de \mathbb{K}^n dont $M_{a,b}$ est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{K}^n . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $u_k = \sum_{1 \leq i \leq k} e_i$. Montrez que la famille $\mathcal{U} = (u_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de \mathbb{K}^n . Calculez la matrice de Φ dans la base \mathcal{U} .
- Q12** Pour chacune des conditions suivantes, proposez une matrice carrée d'ordre n répondant à la condition : (1) la suite $(A^k)_{k \geq 1}$ est constante ; (2) la suite $(A^k)_{k \geq 1}$ est 2-périodique ; (3) la suite $(A^k)_{k \geq 1}$ est n -périodique ; (4) la suite $(A^k)_{k \geq 1}$ est N -périodique, avec $N > n$.