Q1 Commutant d'une matrice A carrée d'ordre n : c'est l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$. Montrez que c'est un s.e.v. et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Explicitez le commutant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Q2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; déterminez les matrices B telles que $BA = I_2$.

Q3 $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$. Notons E l'ensemble des $M_{a,b,c}$ lorsque (a, b, c) décrit $\mathbb{R}^3$. Montrez que E est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; déterminez sa dimension. Montrez que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Discutez le rang de $M_{a,b,c}$ en fonction des valeurs de a, b et c. Donnez une CNS pour que $M_{a,b,c}$ soit inversible, et explicitez son inverse lorsque ceci a un sens. Explicitez une base de E formée de matrices de rang 1 ; puis une base de E formée de matrices dont les coefficients valent 0 ou 1.

Q4 $G(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; montrez que $\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Q5 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculez $A^3 - 3A^2 + 2A$; quel est le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$? Explicitez A^n. A est-elle inversible ?

Q6 Deux matrices A et B vérifient $AB = I + A + A^2$. Que pouvez-vous dire de leurs « formes » respectives ? Montrez que A est inversible, puis que $AB = BA$.

Q7 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $(A - \mathbf{I}_3)(A + 3\,\mathbf{I}_3)$. En déduire une expression de A^2 en fonction de A et $\mathbf{I}_3$. Montrez que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers a_k et b_k tels que $A^k = a_k A + b_k\,\mathbf{I}_3$. Exprimez a_{k+1} et b_{k+1} et fonction de a_k et b_k, puis exprimez a_k et b_k en fonction de k.

Q8 Soient a et b deux scalaires. Notons $M(a, b)$ la matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à a, et les autres coefficients sont égaux à b. Pour quelles valeurs du couple (a, b) cette matrice est-elle inversible ? Explicitez son inverse.

Q9 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; montrez que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$; pour quel(s) couple(s) (a, b) a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Q10 Soient $V_1, V_2, \ldots, V_k$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $V_1 + V_2 + \cdots + V_k \in GL_n(\mathbb{K})$. Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_k \end{pmatrix}$. Vous commencerez par donner la « forme » de cette matrice.

Q11 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $A^3 - A$. En déduire que A est inversible, et calculez son inverse.

Q12 Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients tous nuls, sauf $A_{1,n} = A_{n,1} = 1$. Explicitez A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

Q13 Déterminez le commutant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q14 Notons $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et F l'ensemble des matrices $A \in E$ dont la trace est nulle. Montrez que F est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Exhibez une base de F ; complétez cette base pour obtenir une base de E.

Q15 Notons $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ celle de $\mathbb{K}^2$. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et ψ l'application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$ dont A est la matrice dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Notons $\mathcal{U}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$, où $u'_1 = u_2 + u_3$, $u'_2 = u_3 + u_1$, $u'_3 = u_1 + u_2$; et $\mathcal{V}' = (v'_1, v'_2)$ où $v'_1 = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ et $v'_2 = \dfrac{v_1 - v_2}{2}$. Explicitez la matrice de A dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}'$, puis dans les bases $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{V}$, et enfin dans les bases $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{V}'$.