Sup PCSI 2 — Exercices : matrices (3)

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Définissons A et B, carrées d'ordre n, par $A_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$ et $B_{p,q} = \overline{A_{p,q}}$. Calculez A^2, B^2, AB et BA. En déduire que A est inversible, précisez son inverse.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculez A^2 et prouvez l'existence de α et β tels que $A^2 - \alpha A + \beta I = 0$. Montrez que le s.e.v. E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ engendré par I et A est un anneau commutatif. Prouvez que si $B \in E$ est inversible, alors $B^{-1} \in E$. Caractérisez les matrices des projections non banales de $\mathbb{K}^2$, à l'aide de leur trace et de leur déterminant.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Exhibez une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit diagonale.

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\Phi(P) = \dfrac{P(X+1) + P(X-1)}{2}$. Explicitez sa matrice A dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et calculez A^n.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que $\Phi : P \mapsto (X-1)P' + X^2P''$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$; déterminez sa matrice A dans la base canonique, puis sa matrice B dans la base $\big(1, X-1, (X-1)(X-2), (X-1)(X-2)(X-3)\big)$. Φ est-il injectif ? surjectif ? Déterminez le noyau et l'image de Φ.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P'(X^2+1) - 2XP(X-1)$. Montrez que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$; déterminez la matrice de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$. φ est-elle injective ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez A^2, B^2, AB et BA. Soit E le s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par A et B ; précisez sa dimension ; prouvez que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Précisez les éléments inversibles de E.

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, notons $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix}$. Notons E l'ensemble des matrices $M_{a,b}$ où (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$. (i) montrez que E est un $\mathbb{R}$-e.v. dont vous exhiberez une base *simple*. (ii) montrez que, muni de l'addition et de la multiplication matricielles, E est un corps ; notant $(M_{a,b})^{-1} = M_{c,d}$, exprimez c et d en fonction de a et b. (Source : Bac C Papeete 1982)

$\boxed{\text{Q10}}$ Notons E le s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ engendré par $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, $g : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $h : t \mapsto \ln(t)$. (i) justifiez rapidement le fait que $\mathcal{B} = (f, g, h)$ est une base de E. (ii) soit $p \in E$; calculez les coordonnées de p dans $\mathcal{B}$ en fonction de $p(1)$, $p'(1)$ et $p''(1)$. (ii) soit φ la fonction qui, à $p \in E$, associe $Af + Bg + Ch$, où :

$$\begin{cases} A &= \frac{1}{3}\big(-p(1) + p'(1) - p''(1)\big) \\ B &= \frac{1}{3}\big(4p(1) - p'(1) + p''(1)\big) \\ C &= \frac{1}{3}\big(2p(1) + 4p'(1) - p''(1)\big) \end{cases}$$

Il est clair que φ est linéaire. Déterminez la matrice M de φ dans la base (f, g, h) de E. (iii) montrez que l'ensemble E_1 des éléments de E invariants par φ est un plan vectoriel ; donnez une CNS *très simple* pour que $p \in E_1$. (iv) montrez que l'ensemble E_2 des éléments de E transformés en leur opposé par φ est une droite vectorielle ; donnez également une caractérisation simple de l'appartenance à E_2. (v) montrez que E_1 et E_2 sont supplémentaires l'un de l'autre. Donnez une description simple de φ.

$\boxed{\text{Q11}}$ Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, notons $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$; notons E l'ensemble des matrices $M_{a,b}$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$. (i) montrez que E est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; exhibez une base de E. (ii) montrez que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, E est un corps. (iii) montrez que $f : M_{a,b} \mapsto (a-b) + ib\sqrt{2}$ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. E sur le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$. (iv) montrez que f est aussi un isomorphisme de corps. (v) soit $A = f^{-1}(i)$; déterminez les matrices M de E vérifiant $M^3 = A$. Source : bac C Lyon 1976.