Sup PCSI 2 — Exercices : matrices (2)

Q1 On se place dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$. Déterminez la matrice de la conjugaison dans la base $(1, i)$, puis dans la base $(1, j)$, où $j = \exp(2i\pi/3)$.

Q2 Prouvez que le produit de deux matrices symétriques A et B est lui-même symétrique ssi A et B commutent.

Q3 Notons $\Omega_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de clui situé ligne i, colonne j, qui vaut 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donnez une expression simple de $\Omega_{i,j} M \Omega_{\ell,k}$.

Q4 Considérons la fonction f définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ par :

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-b & b+c \\ a+2d & a+c \end{pmatrix}$$

(i) montrez que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. (ii) déterminez la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, ordonnée comme suit : $\mathcal{B} = (E_{1,1}; E_{1,2}; E_{2,1}; E_{2,2})$. (iii) f est-elle un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

Q5 Inversez la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Q6 Soit U la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculez le carré de U. En déduire que la matrice A, carrée d'ordre $n \geqslant 2$, définie par $A_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$, est inversible et explicitez son inverse.

Q7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Calculez A^k. Montrez que le s.e.v. E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par les A^k est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrez que $B \in E$ ssi B commute avec A.

Q8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $\alpha = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}|$. Donnez un majorant de $|(A^k)_{i,j}|$, en fonction de k, n et α.

Q9 Nous nous proposons de calculer la puissance n-ième de $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, a étant un scalaire quelconque. (i) Peut-on appliquer la formule du binôme dans l'anneau $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$? (ii) Notons $B = A + I_3$. Calculez B^2, puis B^3. (iii) En déduire l'expression de A^n, pour $n \geqslant 2$. Cette expression reste-elle valable pour $n = 0$ et $n1$?

Q10 Calculez le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Q11 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. AB et BA ont-elles nécessairement le même rang ?

Q12 A, B et C sont trois matrices carrées d'ordre n ; aucune n'est nulle, mais ABC l'est. Montrez qu'au plus une de ces matrices est inversible.

Q13 Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A^T X - XA$. Montrez que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Que pouvez-vous dire de $f(X)$ si X est symétrique ? antisymétrique ? En déduire que f n'est pas bijectif. Choisissons $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}; E_{1,2}; E_{2,1}; E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Q14 ⋆⋆ Deux matrices A et B carrées d'ordre n vérifient $A + B = AB$. Montrez que A et B commutent.

Q15 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; calculez la trace de $A\Omega_{i,j}$.

Q16 Deux éléments A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouvez que $A = B$. *Indication* : utilisez la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q17 Résolvez dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'équation $X + \operatorname{tr}(X)A = B$.

Q18 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Prouvez que l'ensemble E des $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec A (autrement dit : qui vérifient $A \cdot M = M \cdot A$) est un s.e.v. et un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; donnez une base de E.