

Q1 On se place dans le  $\mathbb{R}$ -e.v.  $\mathbb{C}$ . Déterminez la matrice de la conjugaison dans la base  $(1, i)$ , puis dans la base  $(1, j)$ , où  $j = \exp(2i\pi/3)$ .

Q2 Prouvez que le produit de deux matrices symétriques  $A$  et  $B$  est lui-même symétrique ssi  $A$  et  $B$  commutent.

Q3 Notons  $\Omega_{i,j}$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé ligne  $i$ , colonne  $j$ , qui vaut 1. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Donnez une expression simple de  $\Omega_{i,j}M\Omega_{\ell,k}$ .

Q4 Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  par :

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c - b & b + c \\ a + 2d & a + c \end{pmatrix}$$

(i) montrez que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . (ii) déterminez la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , ordonnée comme suit :  $\mathcal{B} = (E_{1,1}; E_{1,2}; E_{2,1}; E_{2,2})$ . (iii)  $f$  est-elle un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  ?

Q5 Inversez la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Q6 Soit  $U$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculez le carré de  $U$ . En déduire que la matrice  $A$ , carrée d'ordre  $n \geq 2$ , définie par  $A_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$ , est inversible et explicitez son inverse.

Q7 Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . Calculez  $A^k$ . Montrez que le s.e.v.  $E$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  engendré par les  $A^k$  est un sous-anneau de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . Montrez que  $B \in E$  ssi  $B$  commute avec  $A$ .

Q8 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Notons  $\alpha = \max_{1 \leq i,j \leq n} |A_{i,j}|$ . Donnez un majorant de  $|(A^k)_{i,j}|$ , en fonction de  $k, n$  et  $\alpha$ .

Q9 Nous nous proposons de calculer la puissance  $n$ -ième de  $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $a$  étant un scalaire quelconque. (i) Peut-on appliquer la formule du binôme dans l'anneau  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  ? (ii) Notons  $B = A + I_3$ . Calculez  $B^2$ , puis  $B^3$ . (iii) En déduire l'expression de  $A^n$ , pour  $n \geq 2$ . Cette expression reste-elle valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$  ?

Q10 Calculez le rang de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ .

Q11 Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$ .  $AB$  et  $BA$  ont-elles nécessairement le même rang ?

Q12  $A, B$  et  $C$  sont trois matrices carrées d'ordre  $n$ ; aucune n'est nulle, mais  $ABC$  l'est. Montrez qu'au plus une de ces matrices est inversible.

Q13 Fixons  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A^T X - XA$ . Montrez que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Que pouvez-vous dire de  $f(X)$  si  $X$  est symétrique ? antisymétrique ? En déduire que  $f$  n'est pas bijectif. Choisissons  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminez la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (E_{1,1}; E_{1,2}; E_{2,1}; E_{2,2})$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

Q14  $\star\star$  Deux matrices  $A$  et  $B$  carrées d'ordre  $n$  vérifient  $A + B = AB$ . Montrez que  $A$  et  $B$  commutent.

Q15 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ; calculez la trace de  $A\Omega_{i,j}$ .

Q16 Deux éléments  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifient  $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$  pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Prouvez que  $A = B$ . *Indication* : utilisez la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Q17 Résolvez dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'équation  $X + \text{tr}(X)A = B$ .

Q18 Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Prouvez que l'ensemble  $E$  des  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  qui commutent avec  $A$  (autrement dit : qui vérifient  $A \cdot M = M \cdot A$ ) est un s.e.v. et un sous-anneau de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ; donnez une base de  $E$ .