Q1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminez λ et μ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_2$. En déduire A^{-1}, puis A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Q2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^k pour $k \in [\![2,6]\!]$. Donnez ensuite une formule simple pour A^n, en distinguant plusieurs cas de figure.

Q3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Donnez une expression simple de A^n.

Q4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 ; donnez ensuite une formule simple pour A^n, en distinguant deux cas de figure selon la parité de n. Plus généralement, quelles sont les matrices carrées d'ordre 2 qui possèdent cette propriété ?

Q5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez A^n, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Q6 Explicitez la puissance n-ième de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q7 Même question avec les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Q8 Calculez l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q9 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 2. On suppose que la matrice AB est inversible. En est-il nécessairement de même pour la matrice BA ?

Q10 Rappel : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Exhibez trois matrices P, Q et R carrées d'ordre 2, telles que $\operatorname{tr}(PQR) \neq \operatorname{tr}(QPR)$.

Q11 $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifie $\operatorname{tr}(AX) = 0$ pour toute matrice carrée X d'ordre 2. Que pouvez-vous dire de A ? Indication : utilisez la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrez que la propriété que vous venez d'établir reste vraie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q12 Deux matrices A et B carrées d'ordre 2 vérifient $AB - BA = A$. Calculez la trace de A^{2009}.

Q13 Deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifient $AB - BA = A$. Prouvez que A n'est pas inversible. *Indication* : raisonnez par l'absurde et utilisez la trace.

Mini-problème (Bac série C, juin 1976, Grenoble)

► Soient $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Notons $\mathbf{E}$ la partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des matrices de la forme $\lambda A + \mu B$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Q1 Calculez A^2, B^2, AB et BA.

Q2 Montrez que $\mathbf{E}$ est stable pour les opérations matricielles (somme, produit par un scalaire, produit matriciel).

Q3 Quels sont les éléments inversibles de $\mathbf{E}$?

Q4 Montrez que si un élément de $\mathbf{E}$ est inversible, son inverse est encore dans $\mathbf{E}$.

Mini-problème (Bac série C, juin 1976, Lyon)

► Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, notons $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$. Notons $\mathcal{F} = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Q1 Montrez que $\mathcal{F}$ est stable pour les opérations matricielles (somme, produit, produit par un scalaire).

Q2 Montrez que tout élément de $\mathcal{F}$ autre que la matrice nulle est inversible, et que son inverse est dans $\mathcal{F}$.