PCSI2 — Un exercice d'algèbre linéaire

Question

Il s'agit de montrer que, dans le $\mathbb{Q}$-e.v. $\mathbb{R}$, la famille $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ est libre.

Réponse

Soient a, b et c trois rationnels tels que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$.

Alors $a + b\sqrt{2} = -c\sqrt{3}$, donc $\left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = 3c^2$, soit $a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2$, soit $2ab\sqrt{2} = 3c^2 - a^2 - 2b^2$.

Observons que $3c^2 - a^2 - 2b^2$ est rationnel ; donc $2ab\sqrt{2}$ également, ce qui implique $ab = 0$.

Si $b = 0$, alors $a = -c\sqrt{3}$ et par suite $a = c = 0$.

Sinon, $a = 0$, alors $b\sqrt{2} = -c\sqrt{3}$, donc $2b = -c\sqrt{6}$: ceci implique $b = c = 0$.

Dans les deux cas $a = b = c = 0$.

Commentaire

Encore un coup du vendredi 13 ?

Bonnes vacances à toutes & à tous.