Énoncé

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On suppose $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. *Attention* : f et g ne sont peut-être pas inverses l'un de l'autre... Prouvez que $\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}\, g$, $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\ker f \oplus \mathrm{im}\, g = E$.

Corrigé

• L'inclusion $\mathrm{im}(g \circ f) \subset \mathrm{im}\, g$ est banale : si $y \in \mathrm{im}(g \circ f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)x$. Par suite, $y = g\big(f(x)\big)$ donc $y \in \mathrm{im}\, g$.

• Prouvons l'inclusion inverse. Soit $y \in \mathrm{im}\, g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Mais $x = \mathrm{Id}_E(x) = (f \circ g)(x)$; par suite, $y = g\big((f \circ g)(x)\big) = (g \circ f \circ g)(x) = (g \circ f)\big(g(x)\big)$. Ceci montre que y appartient à $\mathrm{im}(g \circ f)$.

• L'inclusion $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ est banale : si $x \in \ker f$, alors $f(x) = \overrightarrow{0}$, puis $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, donc x appartient à $\ker(g \circ f)$.

• Prouvons l'inclusion inverse. Soit $x \in \ker(g \circ f)$. Nous avons $(g \circ f)(x) = \overrightarrow{0}$; à plus forte raison, $f\big((g \circ f)(x)\big) = \overrightarrow{0}$, soit $(f \circ g \circ f)(x) = \overrightarrow{0}$. Mais $f \circ g \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f$, si bien que $f(x) = \overrightarrow{0}$, soit $x \in \ker f$.

• Montrons que $\ker f$ et $\mathrm{im}\, g$ sont en somme directe, c'est-à-dire $\ker f \oplus \mathrm{im}\, g = \{\overrightarrow{0}\}$. L'inclusion de droite à gauche est banale. Prouvons l'inclusion inverse. Soit donc $y \in \ker f \oplus \mathrm{im}\, g$. Alors $y \in \ker f$, donc $f(y) = \overrightarrow{0}$; par ailleurs, $y \in \mathrm{im}\, g$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Alors $x = \mathrm{Id}_E(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(y) = \overrightarrow{0}$; du coup, $y = g(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

• Montrons que $E = \ker f + \mathrm{im}\, g$. L'inclusion de droite à gauche est banale. Prouvons l'inclusion inverse. Soit $x \in E$; notons $y = (g \circ f)(x)$ et $z = x - y$. Nous avons clairement $x = y + z$ et $y \in \mathrm{im}\, g$. D'autre part, $f(z) = f(x - y) = f(x) - f(y) = f(x) - f\big((g \circ f)(x)\big) = f(x) - (f \circ g \circ f)(x)$; mais nous avons remarqué plus haut que $f \circ g \circ f = f$, donc $f(z) = f(x) - f(x) = \overrightarrow{0}$, si bien que $z \in \ker f$. Ceci termine la preuve.

Remarques

• Si E est de dimension finie, alors f et g sont des isomorphismes de E, inverses l'un de l'autre. Donnons deux exemples montrant que, dans un espace de dimension infinie, il se peut que f et g ne soient pas des isomorphismes.

• Premier exemple : E est le $\mathbb{R}$-e.v. des suites de réels. f est l'application qui, à la suite de terme général u_n, associe la suite de terme général v_n définie par $v_n = u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, et $v_0 = 0$; g est l'application qui, à la suite de terme général u_n, associe la suite de terme général u_{n+1}. Vous vérifierez successivement que :

- f et g sont des endomorphismes de E ;
- $f \circ g$ est l'identité de E ;
- f est injectif, mais non surjectif ;
- g est surjectif, mais non injectif ;

• Deuxième exemple : $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; f est la dérivation, et g est la fonction qui, à $\varphi \in E$, associe la primitive de φ qui s'annule en 0.