Exercice 1 : énoncé

► Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; notons $\mathbf{T}_\alpha$ la fonction qui, à $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, associe $\mathbf{T}_\alpha(f)$ définie par $\big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)(x) = f(x-\alpha)$. Vous noterez soigneusement le rôle des parenthèses dans $\big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)(x)$.

Q1 La notation $\mathbf{T}_\alpha\big(f(x)\big)$ a-t-elle un sens ?

Q2 Justifiez : $\mathbf{T}_\alpha$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q3 Que pouvez-vous dire de $\mathbf{T}_\alpha \circ \mathbf{T}_\beta$?

Q4 Que pouvez-vous dire alors de la fonction $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{T}_\alpha$?

Q5 Justifiez : $\mathbf{T}_\alpha$ est un automorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

► Notons $\mathrm{p} : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$, $\mathrm{q} : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}$, $\mathrm{r} : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$ et $\mathrm{s} : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{-x}$. $\mathcal{E}$ désigne le s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \mathrm{s})$.

Q6 Montrez que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$.

Q7 Exprimez $\mathbf{T}_\alpha(\mathrm{p})$, $\mathbf{T}_\alpha(\mathrm{q})$, $\mathbf{T}_\alpha(\mathrm{r})$ et $\mathbf{T}_\alpha(\mathrm{s})$ en fonction de p, q, r et s.

Q8 Montrez que $\mathcal{E}$ est stable par $\mathbf{T}_\alpha$.

► $\mathbf{T}_\alpha$ induit donc un endomorphisme de $\mathcal{E}$, que nous noterons $\widehat{\mathbf{T}_\alpha}$.

Q9 Justifiez : $\widehat{\mathbf{T}_\alpha}$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Q10 Explicitez la matrice M_α de $\widehat{\mathbf{T}_\alpha}$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$.

Q11 Explicitez la matrice inverse de M_α.

► Notons $\mathbf{D}$ la fonction qui, à $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, associe $\mathbf{D}(f) = f'$. Il est clair que $\mathbf{D}$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q12 $\mathbf{D}$ est-il injectif ?

Q13 $\mathbf{D}$ est-il surjectif ?

Q14 Exprimez $\mathbf{D}(\mathrm{p})$, $\mathbf{D}(\mathrm{q})$, $\mathbf{D}(\mathrm{r})$ et $\mathbf{D}(\mathrm{s})$ en fonction de p, q, r et s.

Q15 Montrez que $\mathcal{E}$ est stable par $\mathbf{D}$.

► $\mathbf{D}$ induit donc un endomorphisme de $\mathcal{E}$, que nous noterons $\widehat{\mathbf{D}}$.

Q16 Explicitez la matrice Δ de $\widehat{\mathbf{D}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q17 Justifiez : $\widehat{\mathbf{D}}$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Q18 Calculez la matrice inverse de Δ.

Q19 Les automorphismes $\widehat{\mathbf{T}}$ et $\widehat{\mathbf{D}}$ commutent-ils ?

► Notons Eq_2 l'équation différentielle $y'' = y$ et Eq_4 l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$. Par « solution » de l'une de ces équations, nous entendons « solution sur $\mathbb{R}$ ».

Q20 Montrez que tout élément de $\mathcal{E}$ est solution de Eq_4.

Q21 Soit f une solution de Eq_4. De quelle équation $f'' - f$ est-elle solution ?

Q22 Décrivez (sans preuve) les solutions de Eq_2.

Q23 Décrivez (sans preuve) les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = e^x$, puis celles de l'équation différentielle $y'' - y = e^{-x}$.

Q24 Montrez que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des solutions de Eq_4.

Exercice 1 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ • Non : $f(x)$ est un réel, alors que $\mathbf{T}_\alpha$ s'applique à des éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, lesquels ne sont pas des réels.

$\boxed{\text{Q2}}$ • Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et λ et x deux réels. Nous aurons :

$$\big(\mathbf{T}_\alpha(f+\lambda g)\big)(x) = (f+\lambda g)(x-\alpha) = f(x-\alpha)+\lambda g(x-\alpha) = \big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)(x)+\lambda\big(\mathbf{T}_\alpha(g)\big)(x) = \big(\mathbf{T}_\alpha(f)+\lambda\mathbf{T}_\alpha(g)\big)(x)$$

Ceci vaut quel que soit le réel x ; donc $\mathbf{T}_\alpha(f+\lambda g) = \mathbf{T}_\alpha(f)+\lambda\mathbf{T}_\alpha(g)$. Cette dernière égalité vaut quels que soient f, g et λ. Donc $\mathbf{T}_\alpha$ est linéaire.

• Notons I_α la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x-\alpha$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; nous avons $\big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)(x) = f(x-\alpha) = f\big(I_\alpha(x)\big) = (f \circ I_\alpha)(x)$, et ce quel que soit le réel x. Donc $\mathbf{T}_\alpha(f) = f \circ I_\alpha$. Donc, par composition : si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\mathbf{T}_\alpha(f)$ l'est aussi. Ceci montre que $\mathbf{T}_\alpha$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Nous avons :

$$\big((\mathbf{T}_\alpha\circ\mathbf{T}_\beta)(f)\big)(x) = \Big(\mathbf{T}_\alpha\big(\mathbf{T}_\beta(f)\big)\Big)(x) = \big(\mathbf{T}_\beta(f)\big)(x-\alpha) = f\big((x-\alpha)-\beta\big) = f\big(x-(\alpha+\beta)\big) = \big(\mathbf{T}_{(\alpha+\beta)}(f)\big)(x)$$

et ce quel que soit $x \in \mathbb{R}$; donc $(\mathbf{T}_\alpha \circ \mathbf{T}_\beta)(f) = \mathbf{T}_{(\alpha+\beta)}(f)$; mais ceci vaut pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc $\boxed{\mathbf{T}_\alpha \circ \mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_{(\alpha+\beta)}}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • Nous venons de montrer que la fonction $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{T}_\alpha$ est un morphisme de l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la loi $+$, sur l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$ muni de la loi de composition des applications.

$\boxed{\text{Q5}}$ D'après Q5, $\mathbf{T}_\alpha \circ \mathbf{T}_{(-\alpha)} = \mathbf{T}_{(-\alpha)} \circ \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_0$. Mais $\big(\mathbf{T}_0(f)\big)(x) = f(x+0) = f(x)$, et ce quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc $\mathbf{T}_0(f) = f$, et ce pour tout $f \in \mathcal{E}$. On en déduit que $\mathbf{T}_0$ est l'automorphisme identique de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Par suite, $\mathbf{T}_\alpha$ est bijectif, et son automorphisme inverse est $\mathbf{T}_{(-\alpha)}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ • Soient a, b, c et d des réels tels que $ap+bq+cr+ds = 0$; alors $ae^x+be^{-x}+cxe^x+dxe^{-x} = 0$ pour tout réel x. En divisant par xe^x, nous en déduisons $a/x+be^{-2x}/x+c+de^{-2x} = 0$ pour tout $x > 0$; en faisant tendre x vers $+\infty$, il vient $\boxed{c = 0}$.

• Ainsi $ae^x+be^{-x}+dxe^{-x} = 0$ pour tout réel x. En divisant cette fois par e^x, il vient $a+be^{-2x}+dxe^{-2x} = 0$ pour tout réel x ; en faisant tendre x vers $-\infty$, il vient $\boxed{a = 0}$.

• Pour tout réel x, nous avons donc $be^{-x}+dxe^{-x} = 0$, d'où $b+dx = 0$. Ceci implique clairement $\boxed{b = d = 0}$.

• Finalement $\boxed{a = b = c = d = 0}$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une famille libre ; comme c'est une famille génératrice de $\mathcal{E}$ par définition de ce dernier, nous pouvons affirmer que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{E}}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{T}_\alpha(p)\big)(x) &= p(x-\alpha) = e^{x-\alpha} = e^{-\alpha}\,e^x = e^{-\alpha}\,p(x)\\
\big(\mathbf{T}_\alpha(q)\big)(x) &= q(x-\alpha) = e^{-x+\alpha} = e^{\alpha}\,e^{-x} = e^{\alpha}\,q(x)\\
\big(\mathbf{T}_\alpha(r)\big)(x) &= r(x-\alpha) = (x-\alpha)e^{x-\alpha} = -\alpha\,e^{-\alpha}\,e^x+e^{-\alpha}\,xe^x = -\alpha\,e^{-\alpha}\,p(x)+e^{-\alpha}\,r(x)\\
\big(\mathbf{T}_\alpha(s)\big)(x) &= s(x-\alpha) = (x-\alpha)e^{-x+\alpha} = -\alpha\,e^{\alpha}\,e^{-x}+e^{\alpha}\,xe^{-x} = -\alpha\,e^{\alpha}\,q(x)+e^{\alpha}\,s(x)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathbf{T}_\alpha(p) = e^{-\alpha}\,p,\ \mathbf{T}_\alpha(q) = e^{\alpha}\,q,\ \mathbf{T}_\alpha(r) = -\alpha\,e^{-\alpha}\,p+e^{-\alpha}\,r \text{ et } \mathbf{T}_\alpha(s) = -\alpha\,e^{\alpha}\,q+e^{\alpha}\,s}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ • Nous venons de montrer à la question précédente que $\mathbf{T}_\alpha(p)$, $\mathbf{T}_\alpha(q)$, $\mathbf{T}_\alpha(r)$ et $\mathbf{T}_\alpha(s)$ sont tous les quatre dans $\mathcal{E}$: comme $\mathbf{T}_\alpha$ est linéaire, nous pouvons affirmer que l'image par $\mathbf{T}_\alpha$ de tout élément de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{E}$, autrement dit : $\boxed{\mathcal{E} \text{ est stable par } \mathbf{T}_\alpha}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ • $\mathbf{T}_\alpha$ est injectif ; il en est donc de même de $\widehat{\mathbf{T}_\alpha}$. Mais alors ce dernier, en tant qu'endomorphisme injectif de l'espace $\mathcal{E}$ de dimension finie (à savoir 4), est un automorphisme.

$\boxed{\text{Q10}}$ • Il suffit d'utiliser Q7 :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 & -\alpha\,e^{-\alpha} & 0\\ 0 & e^{\alpha} & 0 & -\alpha\,e^{\alpha}\\ 0 & 0 & e^{-\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Q11}}$ • Nous avons vu en Q5 que l'automorphisme inverse de $\mathbf{T}_\alpha$ est $\mathbf{T}_{(-\alpha)}$; donc la matrice inverse de M_α est $M_{(-\alpha)}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ • $\mathbf{D}$ n'est pas injectif, puisque la fonction $x \mapsto 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est dans le noyau de $\mathbf{D}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ • $\mathbf{D}$ est surjectif : si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors elle est continue, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une d'elles : F est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\mathbf{D}(F) = f$.

$\boxed{\text{Q14}}$ • $\boxed{D(p)=p}$ et $D(q)=-q$ sont immédiats.

• $\big(D(r)\big)(x)=r'(x)=e^x+xe^x=p(x)+r(x)=(p+r)(x)$; ceci vaut pour tout réel x, donc $\boxed{D(r)=p+r}$.

• De même, $\big(D(s)\big)(x)=s'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=q(x)-s(x)=(q-s)(x)$; ceci vaut pour tout réel x, donc $\boxed{D(s)=q-s}$.

$\boxed{\text{Q15}}$ • Nous venons de montrer que $\mathbf{D}(p)$, $\mathbf{D}(q)$, $\mathbf{D}(r)$ et $\mathbf{D}(s)$ sont tous les quatre dans $\mathcal{E}$. Par linéarité, l'image par $\mathbf{D}$ de tout élément de $\mathcal{E}$ est encore dans $\mathcal{E}$, autrement dit : $\boxed{\mathcal{E} \text{ est stable par } \mathbf{D}}$.

$\boxed{\text{Q16}}$ • Il suffit d'utiliser Q14 : la matrice de $\widehat{\mathbf{D}}$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\Delta=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Q17}}$ • La matrice Δ est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous non nuls ; ceci suffit pour affirmer qu'elle est inversible. Donc $\widehat{\mathbf{D}}$ est un automorphisme.

$\boxed{\text{Q18}}$ • Avec un peu d'observation, nous trouvons facilement les antécédents de p, q, r et s :

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(p)=p\\&\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(q)=-q\\&\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(r)=\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(-p+p+r)=\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(-p)+\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(p+r)=-p+r\\&\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(s)=\widehat{\mathbf{D}}^{-1}\big(q-(q-s)\big)=\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(q)-\widehat{\mathbf{D}}^{-1}(q-s)=-q-s\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\Delta^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{Q19}}$ • Idée naturelle : comparer $\Delta\times M_\alpha$ et $M_\alpha\times\Delta$. Il y a plus direct :

$$\begin{aligned}&(\mathbf{T}_\alpha\circ\mathbf{D})(f)=\mathbf{T}_\alpha\big(\mathbf{D}(f)\big)=\mathbf{T}_\alpha(f')=f'\circ I_\alpha\\&(\mathbf{D}\circ\mathbf{T}_\alpha)(f)=\mathbf{D}\big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)=\mathbf{D}(f\circ I_\alpha)=(f\circ I_\alpha)'=(I_\alpha)'\times(f'\circ I_\alpha)=f'\circ I_\alpha\end{aligned}$$

Ceci vaut quelle que soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: donc $\boxed{\mathbf{T}_\alpha \text{ et } \mathbf{D} \text{ commutent}}$.

$\boxed{\text{Q20}}$ • p et q sont clairement des solutions de Eq_4, puisque $p''=p$ et $q''=q$. Nous avons $r'=r+p$, donc $r''=r+2p$ puis $r^{(4)}=r+4p$; du coup, $r^{(4)}-2r''+r=0$. De même, $s'=q-s$, d'où $s''=-2q+s$ puis $s^{(4)}=-4q+s$; d'où $s^{(4)}-2s''+s=0$. Ainsi, p, q, r et s sont des solutions de Eq_4 ; comme cette équation est linéaire, tout élément de $\mathcal{E}$ est lui aussi solution de Eq_4.

$\boxed{\text{Q21}}$ • Notons $g=f''-f$; nous avons $g''=f^{(4)}-f''$, donc $g''-g=f^{(4)}-2f''+f$, soit $g''-g=0$. Donc $f''-f$ est solution de Eq_2.

$\boxed{\text{Q22}}$ • Ce sont les fonctions $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{-x}$, où λ et μ sont des réels quelconques.

$\boxed{\text{Q23}}$ • La théorie des équations de la forme $y''+ay'+by=P(x)e^{kx}$ dit que, lorsque k est solution simple de l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$, il existe une solution particulière de la forme $x\mapsto Q(x)e^{kx}$, avec $\deg(Q)=\deg(P)+1$. Ceci dit, il est inutile de déployer l'artillerie lourde : nous avons $r''=r+2p$: donc $r/2$ est une solution particulière de $y''-y=e^x$; la solution générale de cette équation est $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{-x}+xe^x/2$. De même, la solution générale de l'équation $y''-y=e^{-x}$ est $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{-x}+xe^{-x}/2$.

$\boxed{\text{Q24}}$ • Nous avons établi à la question 20 que tout élément de $\mathcal{E}$ est solution de Eq_4. Réciproquement, soit f une solution de Eq_4. D'après Q21, $f''-f$ est solution de Eq_2 ; d'après Q22, il existe des réels λ et μ tels que $f''-f=\lambda p+\mu r$. D'après Q23, et avec le principe de superposition des solutions, il existe des réels k_1, k_2, k_3 et k_4 tels que $f=k_1p+k_2q+k_3r+k_4s$: autrement dit, f appartient à $\mathcal{E}$. Ceci termine la preuve (et le problème, et le DS).

Exercice 2 : énoncé

► Notons $p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$, $q : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)$, $r : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ et $s : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(2x)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ $\mathcal{B} = (p, q, r, s)$ est-elle une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Soient a et b deux réels. Montrez qu'il existe un réel φ tel que $a \cos u + b \sin u = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(u - \varphi)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Vous noterez bien que φ ne dépend pas de u.

► Soient a, b, α et β quatre réels. Notons $k_{a,b,\alpha,\beta} : x \in \mathbb{R} \mapsto a\cos(x - \alpha) + b\cos(2x - \beta)$. Notons E l'ensemble des $k_{a,b,\alpha,\beta}$, où (a, b, α, β) appartient à $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Q3}}$ $\star$ E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$\boxed{\text{Q4}}$ La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de E ?

$\boxed{\text{Q5}}$ La fonction $g : x \mapsto \sin^2(x) - \cos^2(x)$ appartient-elle à E ?

$\boxed{\text{Q6}}$ La fonction $h : x \mapsto 1$ appartient-elle à E ?

$\boxed{\text{Q7}}$ La fonction $\mathcal{D} : f \mapsto f'$ est-elle un endomorphisme de E ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Quelle est la matrice $\mathbf{M}$ de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$?

$\boxed{\text{Q9}}$ La fonction $\mathcal{D}$ est-elle un automorphisme de E ?

$\boxed{\text{Q10}}$ Quelle est la matrice inverse $\mathbf{M}^{-1}$ de $\mathbf{M}$?

Exercice 2 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ Clairement, les quatre fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soient a, b, c et d quatre réels tels que $af + bg + ch + dk = 0$. La partie paire et la partie impaire du membre de gauche doivent être toutes deux nulles, donc $af + bg = 0$ et $ch + dk = 0$. La première de ces égalités implique $a \sin x + b \sin 2x = 0$ pour tout réel x ; en particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$, il vient $a = 0$; puis, pour $x = \frac{\pi}{4}$, il vient $b = 0$. La deuxième égalité implique $c \cos x + d \cos 2x = 0$ pour tout réel x ; en particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$, il vient $d = 0$; puis, pour $x = 0$, il vient $c = 0$. Finalement, $a = b = c = d = 0$, ce qui montre que la famille (f, g, h, k) est libre.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si $a = b = 0$, n'importe quel réel φ convient. Sinon, il s'agit de déterminer φ vérifiant

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos u + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin u = \cos(u - \varphi)$$

On note alors que $A = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $B = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ vérifient $A^2 + B^2 = 1$. Nous savons qu'il existe un réel φ (en fait, une infinité, deux à deux égaux *modulo* 2π) tel que $\cos\varphi = A$ et $\sin\varphi = B$; alors :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos u + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin u = \cos\varphi \cos u + \sin\varphi \sin u = \cos(u - \varphi)$$

et ce, indépendamment de la valeur de u.

$\boxed{\text{Q3}}$ Que $\mathcal{E}$ soit une partie non vide de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est banal. Notons $s_{a,b,\alpha,\beta}$ l'application qui, au réel x, associe $a\cos(x - \alpha) + b\cos(2x - \beta)$.
Soient $s_{a,b,\alpha,\beta}$ et $s_{a',b',\alpha',\beta'}$ deux éléments de $\mathcal{E}$, et λ un réel. On aura :

$$\begin{aligned}(s_{a,b,\alpha,\beta} + \lambda s_{a',b',\alpha',\beta'})(x) &= (s_{a,b,\alpha,\beta})(x) + (\lambda s_{a',b',\alpha',\beta'})(x) \\ &= a\cos(x-\alpha) + b\cos(2x-\beta) + \lambda\big(a'\cos(x-\alpha') + b'\cos(2x-\beta')\big) \\ &= A\sin x + B\sin 2x + C\cos x + D\cos 2x\end{aligned}$$

où $A = a\sin\alpha + \lambda a' \sin\alpha'$, $B = b\sin\beta + \lambda b' \sin\beta'$, $C = a\cos\alpha + \lambda a'\cos\alpha'$, $D = b\cos\beta + \lambda b' \cos\beta'$.
Appliquons alors le résultat de la question précédente : il existe des réels φ et ψ tels que :

$$A\sin x + C\cos x = \sqrt{A^2 + C^2}\cos(x - \varphi)$$
$$B\sin 2x + D\cos 2x = \sqrt{B^2 + D^2}\cos(2x - \psi)$$

et ce quel que soit le réel x ; ceci prouve l'appartenance de $s_{a,b,\alpha,\beta} + \lambda s_{a',b',\alpha',\beta'}$ à $\mathcal{E}$, et par suite, le fait que $\mathcal{E}$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q4}}$ On sait déjà que $\mathcal{B}$ est libre ; il suffit donc de montrer qu'elle est génératrice de $\mathcal{E}$. Soit donc $s : x \in \mathbb{R} \mapsto a\cos(x-\alpha) + b\cos(2x-\beta)$. On peut écrire

$$\begin{aligned} s(x) &= a(\cos x \cos\alpha + \sin x \sin\alpha) + b(\cos 2x \cos\beta + \sin 2x \sin\beta) \\ &= a\sin\alpha \sin x + b\sin\beta \sin 2x + a\cos\alpha \cos x + b\cos\beta \cos 2x \\ &= a\sin\alpha f(x) + b\sin\beta g(x) + a\cos\alpha h(x) + b\cos\beta k(x) \end{aligned}$$

Cette égalité vaut pour tout réel x ; on en déduit $s = a\sin\alpha f + b\sin\beta g + a\cos\alpha h + b\cos\beta k$ ce qui termine la preuve.

$\boxed{\text{Q5}}$ Oui : il suffit de noter que $p(x) = -\cos 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $p = -k$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Non ; pour le voir, procédons par l'absurde. Soient a, b, c et d quatre réels tels que $af + bg + ch + dk = q$. Les parties impaires des deux membres doivent être égales, ce qui implique $af + bg = 0$, puis $a = b = 0$ puisque la famille (f, g) est libre. On a donc $c\cos x + d\cos 2x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci impose $c + d = 0$ (en prenant $x = 0$), $-c + d = 0$ (en prenant $x = \pi$) et $d = -1$ (en prenant $x = \pi/2$) ; or les deux premières égalités impliquent $c = d = 0$, contredisant la troisième. Autre méthode, une fois qu'on a établi $a = b = 0$: en dérivant l'égalité $ch + dh = q$, il vient $ch' + dk' = q'$, soit $-cf - 2dg = 0$, d'où $c = d = 0$.

$\boxed{\text{Q7}}$ La linéarité de $\mathbb{D}$ est celle de la dérivation ; de plus, $f' = h$, $g' = 2k$, $h' = -f$ et $k' = -2g$. Ainsi, chaque élément de $\mathcal{B}$ a son image dans $\mathcal{E}$; par linéarité, il en est de même pour tout élément de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ On vient de faire les calculs nécessaires : $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ • L'image par $\mathbb{D}$ de la famille $\mathcal{B} = (f, g, h, k)$ est la famille $(h, 2k, -f, -2g)$ qui est clairement libre : $ah + b(2k) + c(-f) + d(-2g) = 0$ implique $ah + 2bk - cf - 2dg = 0$, donc $a = 2b = -c = -2d = 0$ et finalement $a = b = c = d = 0$. $\mathcal{E}$ étant de dimension 4, cette famille est une base de $\mathcal{E}$, ce qui montre que $\mathbb{D}$ est un automorphisme.

• Autre méthode : soit $f \in \ker\mathbb{D}$; $\mathbb{D}(f) = 0$, soit $f' = 0$, donc f est constante : $f = \lambda \cdot q$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais $1 \notin \mathcal{E}$ d'après Q, donc $\lambda = 0$, puis $f = 0$, si bien que $\mathbb{D}$ est injective. Comme $\mathcal{E}$ est de dimension finie, $\mathbb{D}$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ $\mathbb{D}(h) = -f$, donc $\mathbb{D}^{-1}(f) = -h$; $\mathbb{D}(k) = -2g$, donc $\mathbb{D}^{-1}(g) = -\dfrac{1}{2}k$; $\mathbb{D}(f) = h$, donc $\mathbb{D}^{-1}(h) = f$; et $D(g) = 2k$, donc $\mathbb{D}^{-1}(k) = \dfrac{1}{2}g$. Finalement : $\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : énoncé

- Tous les vecteurs considérés dans ce problème appartiennent à $\mathbb{R}^3$. Nous noterons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous utiliserons les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $w = (0, 1, -1)$.
- Toutes les matrices considérées dans ce problème sont carrées d'ordre 3. Nous noterons **Id** la matrice unité et **0** la matrice nulle.
- Nous noterons **id** l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que ker(f) est la droite vectorielle engendrée par u.

$\boxed{\text{Q2}}$ La matrice **A** est-elle inversible ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminez le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est 1, et qui vérifie $\mathrm{f}(v) = u$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Déterminez le vecteur w de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est 1, et qui vérifie $\mathrm{f}(w) = v$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Explicitez la matrice **N** de f dans la base $\mathcal{C}$.

▶ Notons $\mathbf{P}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Donnez la relation liant $\mathbf{A}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^{-1}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire que l'on a $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ pour $k \geqslant 3$.

▶ Notons $C_\mathbf{N}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\mathbf{N}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que $C_\mathbf{N}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez que la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2)$ est libre.

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2)$ est une base de $C_\mathbf{N}$.

▶ Notons de même $C_\mathbf{A}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\mathbf{A}$. Il est clair que $C_\mathbf{A}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{Q12}}$ Montrez que $C_\mathbf{A}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que la matrice $\mathbf{M}$ appartient à $C_\mathbf{A}$ si et seulement si la matrice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ appartient à $C_\mathbf{N}$.

$\boxed{\text{Q14}}$ En déduire que $C_\mathbf{A}$ est le s.e.v. engendré par $\mathbf{Id}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^2$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Quelle est la dimension de $C_\mathbf{A}$?

Exercice 3 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ Nous avons $\mathbf{A} \cdot u = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $u \in \ker(f)$; par linéarité, la droite vectorielle engendrée par u est entièrement contenue dans $\ker(f)$. Nous remarquons que $\mathbf{A}$ est de rang au moins 2, puisque ses deux premières colonnes sont indépendantes ; donc elle est de rang exactement 2, et par suite le noyau de f est de dimension 1 ; finalement, $\boxed{\ker(f) = \mathbb{R}u}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ $\mathbf{A}$ n'est donc pas inversible.

$\boxed{\text{Q3}}$ Il s'agit de résoudre l'équation $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3y = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} 2x + 7z = -8 \\ x + 3z = -3 \\ -2x - 6z = -6 \end{cases}$. Nous remarquons que la troisième équation est proportionnelle à la deuxième ; la combinaison $\mathcal{L}_1 - 2\mathcal{L}_2$ nous donne $z = -2$; en reportant dans $\mathcal{L}_1$, il vient $x = 3$. Ainsi $\boxed{v = (3, 1, -2)}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Le calcul est très semblable, nous obtenons $\boxed{w = (0, 1, -1)}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Comme il s'agit d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier qu'elle est libre ; soient donc p, q et r des réels tels que $pu + qv + rw = \overrightarrow{0}$; alors $2p + 3q = 0$ ($\mathcal{L}_1$), $p + q + r = 0$ ($\mathcal{L}_2$) et $-2p - 2q - r = 0$ ($\mathcal{L}_3$) ; $\mathcal{L}_3 + 2\mathcal{L}_2$ nous donne $r = 0$; les deux équations restantes $2p + 3q = 0$ et $p + q = 0$ nous donnent clairement $p = q = 0$. Conclusion : $\boxed{\text{la famille } (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Nous avons $f(u) = \overrightarrow{0}$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$. Donc $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{C} \text{ est } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En application directe du cours, nous avons $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ $\mathbf{A}^k = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^k = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}$ (car les produits $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}$ disparaissent) ; il nous suffit de vérifier que $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, ce qui revient à prouver que f^3 est l'endomorphisme nul ; or $f(u) = \overrightarrow{0}$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$; donc $f^2(v) = f(u) = \overrightarrow{0}$, $f^2(w) = f(v) = u$ et finalement $f^3(u) = f^3(v) = f^3(w) = \overrightarrow{0}$, ce qui termine la preuve.

$\boxed{\text{Q9}}$ $C_\mathbf{N}$ n'est pas vide : il contient les matrices $\mathbf{0}$, $\mathbf{Id}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^2$ par exemple. Soient G et H deux éléments de $C_\mathbf{N}$ et λ un réel ; nous avons : $(G + \lambda H) \cdot \mathbf{N} = G \cdot \mathbf{N} + \lambda H \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot G + \lambda \mathbf{N} \cdot H = \mathbf{N} \cdot (G + \lambda H)$ donc $\mathbf{N}$ commute avec $G + \lambda H$. Ceci vaut quels que soient G, H et λ ; donc $\boxed{C_\mathbf{N} \text{ est un s.e.v. de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Nous commençons par calculer $\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soient p, q et r des réels tels que $p\,\mathbf{Id} + q\mathbf{N} + r\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$; alors $\begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, ce qui donne immédiatement $p = q = r = 0$, donc $\boxed{\text{la famille } (\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2) \text{ est libre}}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Comme $\mathbf{Id}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^2$ appartiennent à $C_{\mathbf{N}}$, ce s.e.v. contient le s.e.v. engendré par $\mathbf{Id}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^2$. Il nous reste à établir l'inclusion inverse ; soit donc $M = \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; nous avons :

$$M \in C_{\mathbf{N}} \iff M \cdot N = N \cdot M \iff \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 0 & a & p \\ 0 & b & q \\ 0 & c & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & q & y \\ c & r & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = b = r = 0 \\ a = q = z \\ p = y \end{cases}$$

Donc $M = \begin{pmatrix} a & p & x \\ 0 & a & p \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a\,\mathbf{Id} + p\mathbf{N} + x\mathbf{N}^2$; ainsi, la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2)$ engendre $C_{\mathbf{N}}$. Conclusion : $\boxed{\text{cette famille une base de } C_{\mathbf{N}}}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ $C_{\mathbf{A}}$ étant un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est en particulier un groupe pour la loi $+$. Le neutre du produit matriciel est $\mathbf{Id}$, qui est dans $C_{\mathbf{A}}$. Soient F et G deux éléments de $C_{\mathbf{A}}$; alors : $(F \cdot G) \cdot \mathbf{A} = F \cdot (G \cdot \mathbf{A}) = F \cdot (\mathbf{A} \cdot G) = (F \cdot \mathbf{A}) \cdot G = (\mathbf{A} \cdot F) \cdot G = \mathbf{A} \cdot (F \cdot G)$; donc $F \cdot G$ commute avec $\mathbf{A}$. Ceci vaut quels que soient les éléments F et G de $C_{\mathbf{A}}$, donc $\boxed{\text{ce dernier est un sous-anneau de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Calcul immédiat, avec $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \in C_{\mathbf{A}} &\iff \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \iff (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^{-1}) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^{-1}) \\ &\iff \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} = (\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^{-1} \iff \mathbf{N} \cdot (\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}) = (\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{N} \\ &\iff (\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}) \in C_{\mathbf{N}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q14}}$ Les matrices $\mathbf{Id}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^2$ sont dans $C_{\mathbf{A}}$; le s.e.v. qu'elles engendrent est donc contenu dans $C_{\mathbf{A}}$. Réciproquement, soit $\mathbf{M} \in C_{\mathbf{A}}$; alors $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$ appartient à $C_{\mathbf{N}}$; comme celui-ci est engendré par $\mathbf{Id}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^2$, il existe des réels x, y et z tels que $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} = x\,\mathbf{Id} + y\mathbf{N} + z\mathbf{N}^2$. Mais alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \cdot (x\,\mathbf{Id} + y\mathbf{N} + z\mathbf{N}^2) \cdot \mathbf{P}^{-1} \\ &= x\mathbf{P} \cdot \mathbf{Id} \cdot \mathbf{P}^{-1} + y\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^{-1} + z\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{P}^{-1} = x\,\mathbf{Id} + y\mathbf{A} + z\mathbf{A}^2 \end{aligned}$$

Ainsi, tout élément $\mathbf{M}$ de $C_{\mathbf{A}}$ est combinaison linéaire de $\mathbf{Id}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^2$; donc la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2)$ est génératrice de $C_{\mathbf{A}}$. Conclusion : $\boxed{C_{\mathbf{A}} \text{ est le s.e.v. engendré par cette famille}}$.

$\boxed{\text{Q15}}$ La famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2)$ est libre ; donc la famille $(\mathbf{Id}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2)$, qui en est l'image par l'automorphisme $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est elle aussi libre. C'est donc une base de $C_{\mathbf{A}}$. Finalement, $\boxed{C_{\mathbf{A}} \text{ est de dimension } 3}$.
